

۱ تابع با ضابطه $f(x) = 2|x+3| - |x-1|$ در بازه‌های نزولی است. ضابطه وارون تابع در این بازه کدام است؟

$y = -x - 7, x \geq -4$ (۲)

$y = -x - 7, x \leq -4$ (۱)

$y = -x + 7, x \geq -4$ (۴)

$y = -x + 7, x \leq -4$ (۳)

۲ کدامیک جزء جواب‌های کلی معادله $\cos 5x = \sin x$ می‌باشد؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

$\frac{k\pi}{3} - \frac{\pi}{8}$ (۴)

$\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ (۳)

$\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12}$ (۲)

$\frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{12}$ (۱)

۳ باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $p(x) = x^5 - 3x^4 + ax - 1$ بر $x - 1$ برابر ۲ و خارج‌قسمت آن $q(x)$ است. باقی‌مانده تقسیم $q(x)$ بر $x - 2$ کدام است؟

-۷ (۴)

۷ (۳)

-۹ (۲)

۹ (۱)

۴ تابع $f(x) = (m^x - 8)x^2 + mx - kx + k$ در هر بازه‌ای هم صعودی و هم نزولی است. در این صورت $f(3) + f(-1)$ کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۵ اگر $f(x) = \left(\left(\frac{1}{2} \right)^x + \text{Log}_{\frac{x}{5}} \right)^2$ باشد، مجموعه جواب نامعادله $f(x) < f(2^{-3x})$ کدام است؟

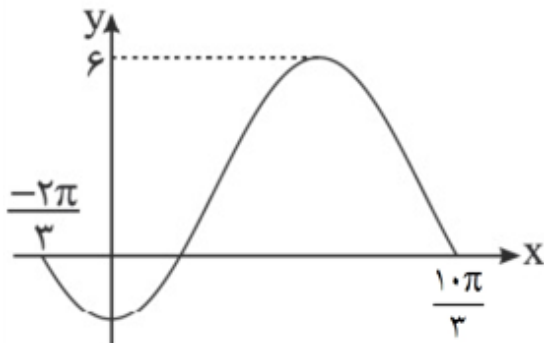
$(0, 1)$ (۴)

$\left(\frac{1}{8}, +\infty \right)$ (۳)

$(1, +\infty)$ (۲)

$\left(0, \frac{1}{8} \right)$ (۱)

۶ نمودار تابع $f(x) = c + a \cos bx$ در یک دوره تناوب به صورت مقابل است. حاصل $ac - |b|$ کدام است؟



-۸/۵ (۴)

۷/۲۵ (۳)

-۷/۵ (۲)

۸/۲۵ (۱)

۷ حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{2x+3} - 6$ کدام است؟

- ۱) -۳ ۲) $-\infty$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $+\infty$

۸ اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2}{3x^2 - ax + b} = -\infty$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{a}{3}} \frac{x^2 - 8x + b}{-x^2 + 6x}$ کدام است؟

- ۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $-\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $-\frac{4}{3}$

۹ اگر $A(3, -1)$ تنها نقطه‌ی تلاقی مجانب‌های $y = \frac{ax^2 + bx + 2}{cx^2 - 6x - 9}$ باشد مقدار b کدام است؟

- ۱) -۲ ۲) ۲ ۳) -۱ ۴) ۱

۱۰ معادله $\sin x \cos x + \frac{1}{2} \sin^2 x = \frac{1}{2} \cos^2 x$ در بازه $[-\pi, \pi]$ ، چند جواب دارد؟

- ۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۱۱ اگر $\lim_{x \rightarrow 1^+} (4 - [x])g(x) = 6$ و $g(x) = \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{|x - 1|}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ کدام است؟

- ۱) -۱ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) -۲

۱۲ تابع $f(x) = \frac{|ax + 1| + 2x}{|x| + b}$ دارای دو مجانب افقی و دو مجانب قائم است. اگر هر ریشه مخرج با یکی از حدهای

تابع در بی‌نهایت برابر باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ کدام است؟

- ۱) -۳ ۲) ۱ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۱۳ تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{ax - \sqrt{x^2 - 1}}{4x^n - 12}$ را در نظر بگیرید. اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{1}{6}$ باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{24}$ ۲) $\frac{1}{18}$ ۳) $\frac{1}{12}$ ۴) $\frac{5}{36}$

۱۴ تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^2 - 2x - 3$ با دامنه‌ی $\{x : |x - 1| < 2\}$ همواره چگونه است؟

- ۱) منفی ۲) مثبت ۳) صعودی ۴) نزولی

۱۵ جواب کلی معادلهی مثلثاتی $\cos^2 x + 2 \cos^2 x = 0$ ، کدام است؟

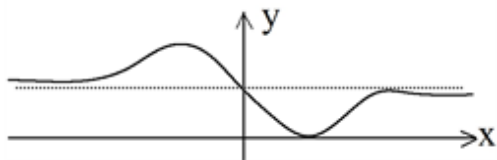
$k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۴)

$k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۳)

$2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ (۲)

$2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۱)

۱۶ شکل روبه‌رو، نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 8}{x^2 + 4}$ است. $a + b$ کدام است؟



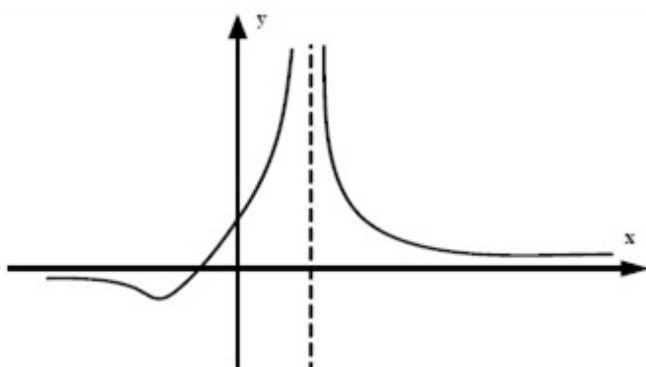
۱۰ (۴)

۹ (۳)

-۶ (۲)

-۷ (۱)

۱۷ شکل مقابل نمودار تابع $y = \frac{x + a}{x^2 + bx + 4}$ است. مقادیر a و b ، چگونه است؟



$b = -4, a > 0$ (۴)

$b = 4, a > 0$ (۳)

$b = -4, a < 0$ (۲)

$b = 4, a < 0$ (۱)

۱۸ حاصل $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3}{2x^2 + 5x + 2} - \frac{4}{x^2 - 4}$ ، کدام است؟

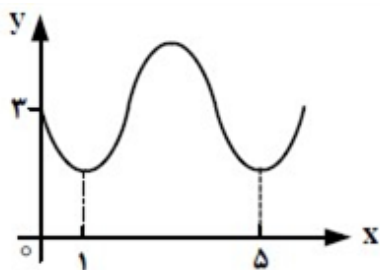
$\frac{7}{12}$ (۴)

$\frac{5}{12}$ (۳)

$-\frac{5}{12}$ (۲)

$-\frac{7}{12}$ (۱)

۱۹ شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = a + \sin(b\pi x)$ است. مقدار y در نقطه‌ی $x = \frac{25}{3}$ ، کدام است؟



$3/5$ (۴)

۳ (۳)

$2/5$ (۲)

۲ (۱)

۲۰ اگر $f(x) = \frac{x+3}{2x+1}$ و $g(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ باشند، نقطه تلاقی مجانب‌های تابع fog کدام است؟

- ۱ $(-1, 1)$ ۲ $(-1, 0)$ ۳ $(-2, 2)$ ۴ $(0, 1)$

۲۱ مقادیر x از معادله $\begin{vmatrix} 0 & x-2 & x-3 \\ x+3 & 0 & 3 \\ x+2 & -2 & 0 \end{vmatrix}$ کدام است؟

- ۱ ± 4 ۲ ± 2 ۳ $\pm \sqrt{6}$ ۴ $\pm 2\sqrt{3}$

۲۲ اگر در دستگاه معادلات $\begin{cases} ax + by = 2 \\ cx + dy = 5 \end{cases}$ ، وارون ماتریس ضرایب به صورت $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $ax + dy$ کدام است؟

- ۱ ۳ ۲ -۳ ۳ -۲ ۴ ۱

۲۳ دو دایره‌ی هم‌مرکز $C: x^2 + y^2 + mx + 4y = 4$ و $C': x^2 + y^2 - 2x + ny = 11$ مفروض هستند. مکان هندسی مرکز دایره‌هایی با کوچک‌ترین شعاع ممکن که بر این دو دایره مماس هستند، کدام است؟

- ۱ $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$ ۲ $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$
 ۳ $(x-1)^2 + (y+2)^2 = \frac{49}{2}$ ۴ $(x-1)^2 + (y+2)^2 = \frac{7}{2}$

۲۴ به‌ازای کدام مقدار k ، اندازه‌ی قطر دایره‌ی $k^2 = (x-2)^2 + (1-3y)^2$ برابر ۸ است؟

- ۱ ± 6 ۲ ± 12 ۳ ± 8 ۴ ± 16

۲۵ اگر $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} |B| & |A| \\ |B^{-1}| & |A^{-1}| \end{bmatrix}$ ، آنگاه $|B|$ برابر کدام می‌تواند باشد؟

- ۱ $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ۲ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۳ $\frac{3}{2}$ ۴ $-\frac{2}{3}$

۲۶ اگر $A \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس A^{-1} برابر کدام است؟

- ۱ ۳ ۲ $\frac{7}{3}$ ۳ $\frac{2}{3}$ ۴ $\frac{11}{3}$

۲۷ اگر ماتریس A در رابطه $A^T + A^T + A + I = \bar{O}$ صدق کند، وارون ماتریس A کدام است؟

- ۱ $-A^T - A$ ۲ A^T ۳ $-A^T + I$ ۴ $A^T - A$

۲۸ اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ و $AB = B + 2I$ باشد، ماتریس B کدام است؟

- ۱ $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ۲ $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ۳ $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ۴ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

۲۹ دایره‌ای به مرکز $(1, 3)$ بر روی خط $5x + 12y = 15$ ، وترى به طول $2\sqrt{21}$ جدا می‌کند. این دایره محور x ها را در نقاط A و B قطع می‌کند. طول وتر AB از دایره کدام است؟

- ۱ ۸ ۲ $2\sqrt{6}$ ۳ ۶ ۴ $2\sqrt{15}$

۳۰ با فرض $A + B = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ و $|AB| = -2$ ، دترمینان ماتریس $A^{-1} + B^{-1}$ کدام است؟

- ۱ ۳ ۲ ۶ ۳ ۱۰ ۴ ۱۵

۳۱ باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر ۵، ۳ و ۷ به ترتیب ۱، ۲ و ۳ می‌باشد. باقی‌مانده‌ی تقسیم اولین عدد ۴ رقمی a بر ۱۱ کدام است؟

- ۱ ۱ ۲ ۲ ۳ ۸ ۴ ۱۰

۳۲ چند نقطه با مختصات صحیح روی منحنی $xy - y + 5x - 8 = 0$ وجود دارد؟

- ۱ ۱ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴ ۴

۳۳ چند عدد چهاررقمی به صورت a^5bc وجود دارد به طوری که باقی‌مانده‌ی تقسیم دو عدد a^5bc و $a^5b + c$ بر ۹۹ یکسان باشد؟

- ۱ ۷۰ ۲ ۸۰ ۳ ۹۰ ۴ ۶۰

۳۴ اگر سوم اردیبهشت سالی، یکشنبه باشد، در کدامیک از ماه‌های زیر دقیقاً ۵ تا یکشنبه وجود دارد؟

- ۱ مهر ۲ آبان ۳ آذر ۴ دی

۳۵ اگر $a \equiv 17 \pmod{21}$ و $b \equiv 13 \pmod{35}$ باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم $a^2b + ab^2$ بر ۷ کدام است؟

- ۱ ۴ ۲ ۳ ۳ ۲ ۴ ۱

۳۶ چند عدد طبیعی d وجود دارد به طوری که $d \mid 1200 + d$ و $d \mid 12 + d$ ؟

- ۱ ۶ ۲ ۹ ۳ ۱۲ ۴ ۱۵

۳۷ ب.م.م دو عدد $2n + 6$ و $n - 1$ چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

- ۱ ۱ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴ ۴

۳۸ در گراف G رابطه $N_G(a) = N_G(b)$ برای رئوس a و b برقرار است. کدام گزینه درست نمی‌باشد؟

- ۱ $\deg a = \deg b$ ۲ $N_G[a] = N_G[b]$ ۳ $N_G[a] = N_G[b]$ ۴ $ab \notin E(G)$

۳۹

مجموع مرتبه و اندازه یک گراف کامل برابر با ۱۲۰ است. اندازه این گراف چند واحد از مرتبه‌اش بزرگ‌تر است؟

۹۱ (۴)

۹۰ (۳)

۱۰۵ (۲)

۱۰۰ (۱)

۴۰ معادله‌ی سیاله $(3a - 1)x + (a + 2)y = 98$ دارای جواب است، اگر و تنها اگر $a \in A$ باشد، مجموعه‌ی A کدام است؟

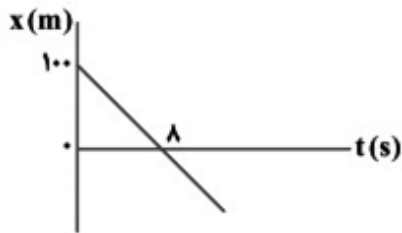
$A = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ (۴)

$A = \mathbb{Z}$ (۳)

$A = \{\text{اعداد اول}\}$ (۲)

$A = \{7k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ (۱)

۴۱ نمودار مکان - زمان متحرکی در یک حرکت بر خط راست، مطابق شکل است. اندازه‌ی سرعت متوسط متحرک در مدت $t = 5s$ تا $t = 10s$ چند متر بر ثانیه است؟



۲۵ (۴)

۱۶ (۳)

۱۲/۵ (۲)

۸ (۱)

۴۲ معادله‌ی مکان - زمان ذره‌ای که روی خط راست حرکت می‌کند، در SI به صورت $x = -5t^2 + 30t + 20$ است. مسافتی که این ذره در بازه‌ی زمانی ۱s تا ۴s طی می‌کند، چند متر است؟

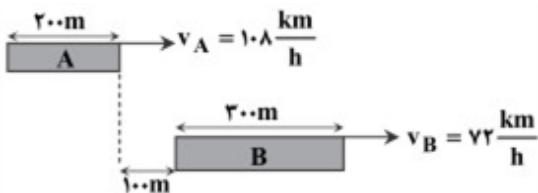
۴۰ (۴)

۲۵ (۳)

۲۰ (۲)

۱۵ (۱)

۴۳ مطابق شکل، دو قطار A و B در لحظه‌ی $t = 0$ در فاصله‌ی ۱۰۰ متری یکدیگر قرار دارند. پس از چه مدت‌زمانی (برحسب دقیقه) از لحظه‌ی $t = 0$ قطار A کاملاً از قطار B سبقت می‌گیرد؟



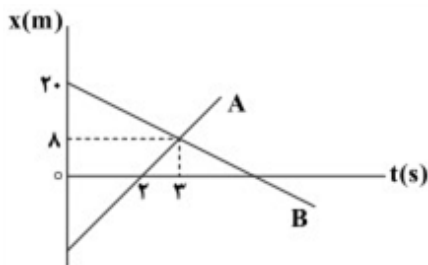
۲ min (۴)

۱/۵ min (۳)

۱ min (۲)

۰/۵ min (۱)

۴۴ نمودار مکان - زمان دو متحرک A و B که روی خط راست حرکت می‌کنند، مطابق شکل است. در لحظه‌ای که متحرک B از مبدأ مکان عبور می‌کند، متحرک A چند متر با متحرک B فاصله دارد؟



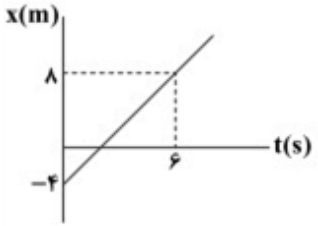
۲۴ (۴)

۲۰ (۳)

۱۶ (۲)

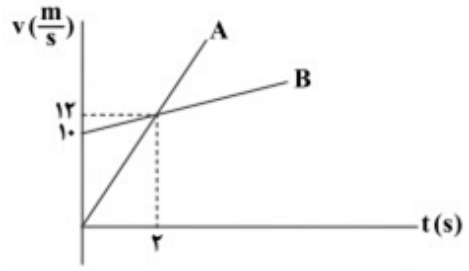
۱۲ (۱)

نمودار مکان - زمان ذره‌ای که روی خط راست حرکت می‌کند، مطابق شکل است. در لحظه‌ی $t = ۲۰s$ ذره از چه مکانی می‌گذرد؟



- ۱ $x = ۴۰m$
 ۲ $x = ۳۶m$
 ۳ $x = ۲۰m$
 ۴ $x = ۱۶m$

دو متحرک A و B روی یک خط راست حرکت می‌کنند و نمودار سرعت - زمان آن‌ها به شکل مقابل است. اگر هر دو متحرک در $t = ۰$ از نقطه‌ی $x = ۵m$ عبور کنند، در $t = ۶s$ فاصله‌ی آن‌ها از یکدیگر چند متر است؟



- ۱ ۳۵
 ۲ ۲۰
 ۳ ۳۰
 ۴ ۲۵

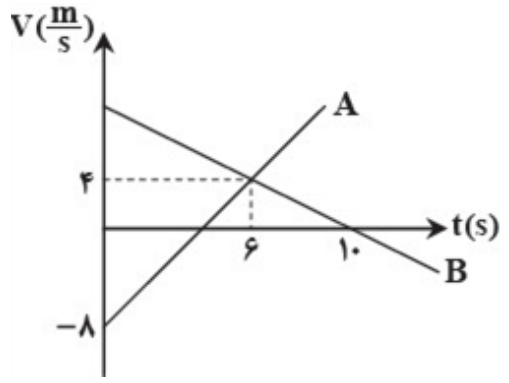
متحرکی با شتاب ثابت روی خط راست حرکت می‌کند و در $t = ۳s$ با سرعت $v = +۱۰ \frac{m}{s}$ از نقطه‌ی $x = +۴۵m$ عبور می‌کند، اگر در مکان $x = +۸۵m$ سرعت آن $v = +۳۰ \frac{m}{s}$ باشد، در چه لحظه‌ای سرعت متحرک $+۵۰ \frac{m}{s}$ می‌شود؟

- ۱ ۱۲s
 ۲ ۱۰s
 ۳ ۷s
 ۴ ۵s

معادله‌ی مکان - زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، در SI به صورت $x = ۳t^۲ - ۳۰t + ۱۲$ است. در بازه‌ی زمانی $t = ۰$ تا $t = ۱۰s$ تندی متوسط متحرک چند متر بر ثانیه است؟

- ۱ صفر
 ۲ ۲۰
 ۳ ۱۵
 ۴ ۷/۵

شکل مقابل، نمودار سرعت - زمان را برای دو جسم A و B نشان می‌دهد که روی خط راست حرکت می‌کنند. در مدت زمانی که جسم A حرکت کندشونده دارد، جسم B چند متر جابه‌جا شده است؟



- ۱ ۴۲
 ۲ ۴۸
 ۳ ۳۶
 ۴ ۳۲

۵۰

متحرکی روی خط راست حرکت می‌کند و معادله مکان - زمان آن در SI به صورت $x = t^2 - 8t + 20$ است. مسافتی که متحرک در مدت $t = 0$ تا $t = 10s$ طی می‌کند، چند متر است؟

۴۰ (۴)

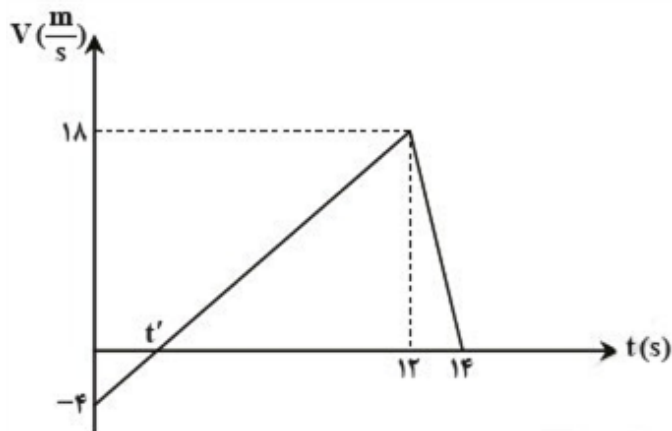
۲۶ (۳)

۲۰ (۲)

۵۲ (۱)

۵۱

شکل مقابل نمودار سرعت - زمان متحرکی را نشان می‌دهد که روی مسیر مستقیم در حرکت است. سرعت متوسط این متحرک در مدتی که حرکت تندشونده دارد، چند متر بر ثانیه است؟



$\frac{11}{7}$ (۴)

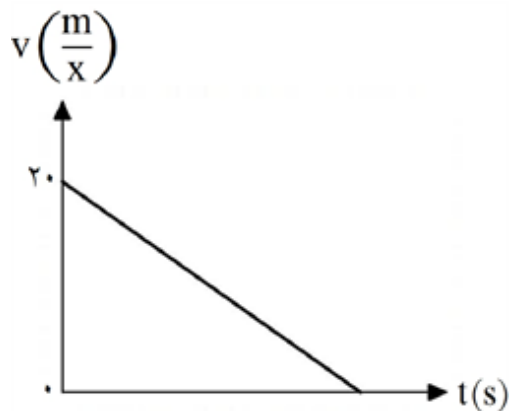
۹ (۳)

۱۲ (۲)

$\frac{7}{5}$ (۱)

۵۲

نمودار سرعت - زمان متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند، مطابق شکل مقابل است. اگر مسافت طی شده در ۴ ثانیه اول، ۳۶ برابر مسافت طی شده در ۲ ثانیه آخر باشد، بزرگی شتاب حرکت، چند متر بر مربع ثانیه است؟



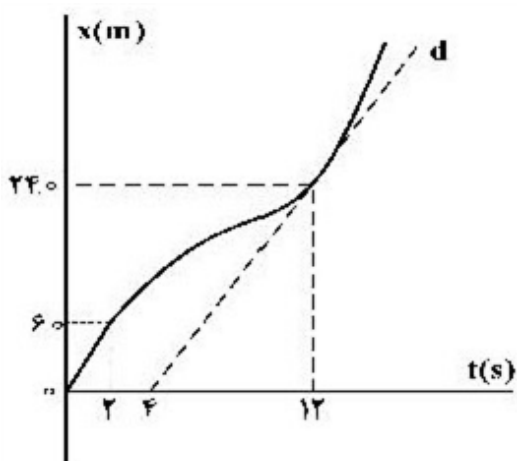
۲ (۴)

$\frac{3}{2}$ (۳)

۱ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

نمودار مکان - زمان متحرکی مطابق شکل زیر است. اگر تندی در لحظه‌ی $t = ۱۲s$ برابر تندی متوسط در بازه‌ی $t_۱ = ۲s$ تا $t_۲ = ۱۴s$ باشد، سرعت متوسط ۲ ثانیه اول چند برابر سرعت متوسط ۲ ثانیه هفتم است؟ (خط d مماس بر نمودار در لحظه‌ی $t = ۱۲s$ است).



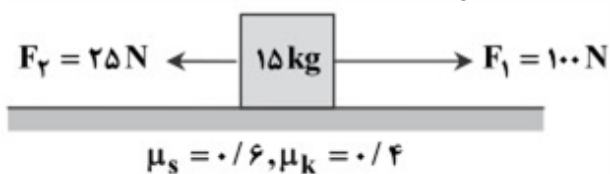
$\frac{۲}{۳}$ (۴)

$\frac{۲}{۵}$ (۳)

$\frac{۱}{۲}$ (۲)

$\frac{۱}{۳}$ (۱)

مطابق شکل، وزنه ابتدا روی میز ساکن است و سپس توسط دو نیروی افقی $F_۱$ و $F_۲$ همزمان کشیده می‌شود. اندازه‌ی نیرویی که سطح تکیه‌گاه بر وزنه وارد می‌کند، چند نیوتون است؟ $(g = ۱۰ \frac{m}{s})$



$۷۵ \sqrt{۳}$ (۴)

۹۰ (۳)

$۷۵ \sqrt{۵}$ (۲)

۱۰۰ (۱)

جسمی را تا چه ارتفاعی از سطح زمین بر حسب کیلومتر باید دور کنیم، تا وزن آن ۳۶ درصد تغییر کند؟ $(G = ۶/۶ \times ۱۰^{-۱۱} \frac{N \cdot m^۲}{kg^۲}$ و $R_e = ۶۴۰۰ \text{ km}$)

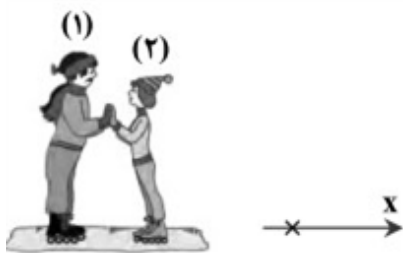
۳۲۰۰ (۴)

۱۶۰۰ (۳)

۱۲۸۰ (۲)

۶۴۰ (۱)

مطابق شکل، دو شخص به جرم‌های $m_1 = 100\text{kg}$ و $m_2 = 50\text{kg}$ با کفش‌های چرخ‌دار در یک سالن مسطح و صاف روبه‌روی هم ایستاده‌اند. اگر شخص سبک‌تر در اثر نیروی هل دادن شخص سنگین‌تر، شتاب $\vec{a} = 2\vec{i}$ برحسب یکای SI بگیرد، شخص سنگین‌تر چه شتابی برحسب یکای SI خواهد گرفت؟



$$\vec{a} = -4\vec{i} \quad \text{۴}$$

$$\vec{a} = 4\vec{i} \quad \text{۳}$$

$$\vec{a} = -\vec{i} \quad \text{۲}$$

$$\vec{a} = \vec{i} \quad \text{۱}$$

یک جعبه‌ی چوبی به جرم m را روی سطح افقی زمین با سرعت $2 \frac{m}{s}$ به طرف جلو هل می‌دهیم و رها می‌کنیم. از لحظه‌ای که جعبه را رها می‌کنیم، ۸۰ سانتی‌متر روی سطح حرکت می‌کند و متوقف می‌شود. ضریب اصطکاک جنبشی بین جعبه و سطح تکیه‌گاه (زمین) کدام است؟ $(g = 10 \frac{N}{kg})$

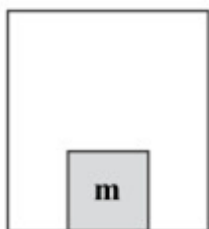
$$\frac{1}{4} \quad \text{۴}$$

$$\frac{1}{3} \quad \text{۳}$$

$$\frac{1}{2} \quad \text{۲}$$

$$\frac{1}{5} \quad \text{۱}$$

مطابق شکل، درون یک آسانسور جعبه‌ای به جرم $m = 10\text{kg}$ قرار دارد. اگر آسانسور به صورت کندشونده با شتاب $1 \frac{m}{s^2}$ در حال پایین آمدن باشد، اندازه‌ی نیرویی که جعبه به کف آسانسور وارد می‌کند، چند نیوتن است؟ $(g = 10 \frac{m}{s^2})$



$$220 \quad \text{۴}$$

$$110 \quad \text{۳}$$

$$180 \quad \text{۲}$$

$$90 \quad \text{۱}$$

چتربازی که مجموع جرم او و چترش 60kg است، مدتی پس از پرش آزاد، چترش را باز می‌کند، ناگهان اندازه‌ی نیروی مقاومت هوا به 1200N افزایش می‌یابد. کدام گزینه درباره‌ی نوع حرکت چترباز از لحظه‌ی باز کردن چتر و پس از آن درست است؟

۱ ابتدا حرکت کندشونده با شتاب متغیر در حال کاهش و سپس سرعت ثابت

۲ ابتدا حرکت کندشونده با شتاب ثابت و سپس سرعت ثابت

۳ ابتدا حرکت تندشونده، سپس کندشونده و سپس با سرعت ثابت

۴ ابتدا حرکت تندشونده، سپس حرکت کندشونده

۶۰ اگر انرژی جنبشی جسمی ۹۱ درصد کاهش یابد، تکانه آن جسم چند درصد کاهش خواهد یافت؟

۹۱ (۴)

۴۸ (۳)

۳۰ (۲)

۷۰ (۱)

۶۱ وزن و جرم جسمی که در فاصله‌ی سه برابر شعاع زمین است، چند برابر وزن و جرم همان جسم روی سطح زمین است؟

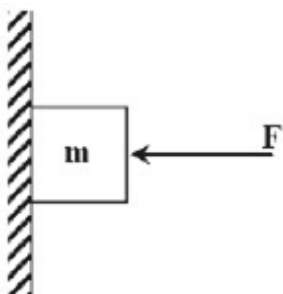
$1, \frac{1}{16}$ (۴)

$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ (۳)

$1, \frac{1}{9}$ (۲)

$\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ (۱)

۶۲ در شکل مقابل، $m = 10 \text{ kg}$ و $F = 200 \text{ N}$ و وزنه ساکن است. اگر نیروی F دو برابر شود، اندازه‌ی نیروی اصطکاک وارد بر وزنه چند برابر می‌شود؟



۲ (۲)

۱ (۱)

(۳) زیاد می‌شود ولی به دو برابر حالت اول نمی‌رسد. (۴) بیش از ۲ برابر

۶۳ آونگ ساده به طول l در حال نوسان می‌باشد. طول آونگ را چگونه تغییر دهیم تا دوره‌ی تناوب آن ۵۰ درصد کاهش یابد؟

باید طول آونگ را ۵۰ درصد کاهش داد. (۲)

باید طول آونگ را ۵۰ درصد افزایش داد. (۱)

باید طول آونگ را ۲۵ درصد افزایش داد. (۴)

باید طول آونگ را ۷۵ درصد کاهش داد. (۳)

۶۴ نوسانگری به جرم 1 kg به فنری با ثابت $K = 100 \frac{N}{m}$ بسته شده و روی پاره‌خطی افقی به طول 80 cm روی سطح زمین بدون اصطکاک نوسان می‌کند. در لحظه‌ای که انرژی پتانسیل کشسانی نوسانگر $u = 6 \text{ J}$ است، سرعت نوسانگر چند متر بر ثانیه است؟

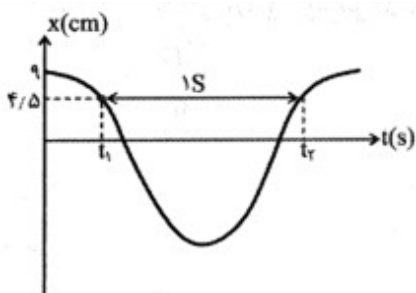
۲ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

۴ (۲)

$\frac{1}{4}$ (۱)

۶۵ با توجه به نمودار مکان - زمان نوسانگری که حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد. بزرگی بیشینه شتاب نوسانگر چند متر بر مربع ثانیه است؟ ($\pi^2 = 10$)



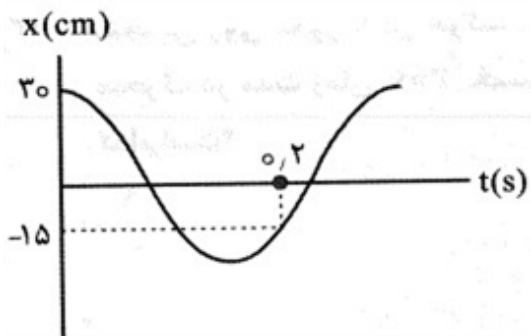
$1/6$ (۴)

$1/4$ (۳)

$1/2$ (۲)

۱ (۱)

نمودار مکان - زمان متحرکی که حرکت هماهنگ ساده دارد، مطابق شکل زیر است. تندی عبور متحرک از نقطه‌ی تعادل چند متر بر ثانیه است؟



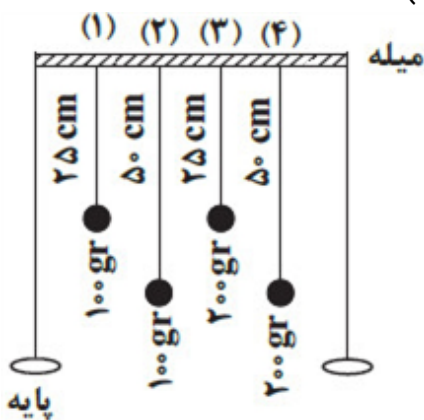
$\frac{7\pi}{4}$ (۴)

$\frac{5\pi}{4}$ (۳)

2π (۲)

π (۱)

در شکل مقابل، می‌خواهیم با ضربات متوالی به میله، ۴ آونگ متصل به آن را به نوسان وا داریم. اگر هر ۱ ثانیه، یک بار به میله ضربه بزنیم، کدام آونگ با بیش‌ترین دامنه نوسان خواهد کرد؟ ($\pi \approx \sqrt{g}$)



آونگ ۲ و ۴ (۴)

آونگ ۲ (۳)

آونگ ۱ و ۳ (۲)

آونگ ۱ (۱)

معادله مکان - زمان نوسانگر هماهنگ ساده‌ای به صورت $x = \frac{2}{100} \text{Cos } 20\pi t$ است، این نوسانگر، تعداد ۴۰ نوسان را

در مدت چند ثانیه انجام می‌دهد؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

یک ساعت آونگ‌دار، در حال نوسان است و بر اثر افزایش دمای محیط، طول آن ۶۹ درصد زیاد می‌شود. این افزایش دما باعث افتادن ساعت می‌شود و دوره‌ی تناوب آن درصد می‌یابد.

جلو - ۱۳۰ - کاهش (۴)

جلو - ۳۰ - افزایش (۳)

عقب - ۱۳۰ - کاهش (۲)

عقب - ۳۰ - افزایش (۱)

معادله‌ی حرکت نوسانگر هماهنگ ساده‌ای در SI، به صورت $x = 0.04 \text{Cos } (2\pi t)$ است. در لحظه‌ای که اندازه‌ی انرژی پتانسیل نوسانگر، برابر با نصف انرژی مکانیکی نوسانگر است، تندی نوسانگر چند سانتی‌متر بر ثانیه است؟ ($\pi = 3$)

۲۴ (۴)

$6\sqrt{2}$ (۳)

$12\sqrt{2}$ (۲)

۱۲ (۱)

۷۱ گلوله‌ای در شرایط خلاء از ارتفاع h سقوط آزاد می‌نماید. در دو ثانیه آخر مسافت ۸۰ متر را طی می‌نماید. ارتفاع h برحسب متر برابر است با:

۱۸۰ (۴)

۱۲۵ (۳)

۱۰۵ (۲)

۹۰ (۱)

۷۲ خودرویی به جرم ۲ تن روی سطح افقی با تندی ثابت $18 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ مسیر دایره‌ای به شعاع ۲۰ متر را دور می‌زند. نیروی مرکزگری خودرو چند نیوتون است و کدام نیرو آن را تأمین می‌کند؟

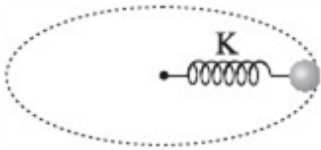
۲۵۰۰ - نیروی اصطکاک جنبشی (۲)

۲۵۰۰ - نیروی اصطکاک جنبشی (۱)

۱۲۵۰ - نیروی اصطکاک ایستایی (۴)

۱۲۵۰ - نیروی اصطکاک جنبشی (۳)

۷۳ مطابق شکل، گلوله‌ای به جرم ۲۰۰ g را به انتهای فنری به طول طبیعی ۳۰ cm بسته و آن را روی یک سطح افقی بدون اصطکاک می‌چرخانیم، در این حالت طول فنر ۵۰ سانتی‌متر می‌شود. اگر ثابت فنر $50 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ باشد، دوره‌ی چرخش جسم چند ثانیه است؟



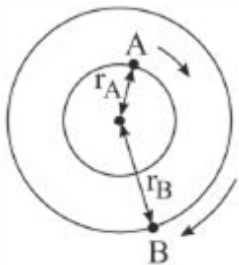
$\frac{\pi}{25}$ (۴)

$\frac{\pi}{5}$ (۳)

$\frac{\pi}{10}$ (۲)

$\frac{\pi}{50}$ (۱)

۷۴ مطابق شکل دو جسم A و B در جهت ساعتگرد با دوره‌های $T_A = \frac{1}{3} T_B$ و شعاع‌های $r_A = \frac{1}{4} r_B$ حرکت دایره‌ای یکنواخت حول یک مرکز انجام می‌دهند. شتاب مرکزگری جسم B چند برابر جسم A است؟



$\frac{2}{9}$ (۴)

$\frac{2}{3}$ (۳)

$\frac{1}{18}$ (۲)

$\frac{1}{6}$ (۱)

۷۵ اتومبیلی به جرم یک تن در یک جاده یک پیچ افقی به شعاع ۳۰ متر را با تندی ثابت $54 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ طی می‌کند. نیرویی که از طرف سطح جاده به اتومبیل وارد می‌شود، چند نیوتن است؟

۱۲۵۰۰ (۴)

۱۷۵۰۰ (۳)

۱۰۰۰۰ (۲)

۷۵۰۰ (۱)

۷۶ با توجه به نیم‌واکنش‌های کاهش‌ی زیر E° نیم‌واکنش $\text{Fe}^{3+}(\text{aq}) + 3e^- \rightarrow \text{Fe}(s)$ به تقریب کدام است؟
 $\text{Fe}^{2+}(\text{aq}) + 2e^- \rightarrow \text{Fe}(s) \quad E^\circ = -0.44\text{V}$
 $\text{Fe}^{3+}(\text{aq}) + 1e^- \rightarrow \text{Fe}^{2+}(\text{aq}) \quad E^\circ = 0.77\text{V}$

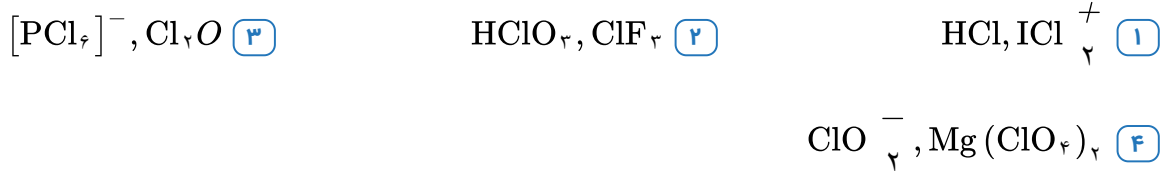
۰/۴ (۴)

-۰/۱۲۱ (۳)

۰/۳۳ (۲)

-۰/۰۴ (۱)

۷۷ در کدام گزینه حالت اکسایش کلر یکسان است؟

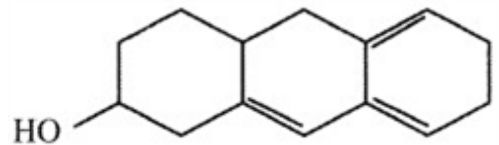


۷۸ چند مورد از مطالب زیر درباره سلول سوختی هیدروژن - اکسیژن، درست است؟

- واکنش کلی رخ داده در آن، مشابه واکنش کلی برقکافت آب است.
- مقدار emf آن برابر با پتانسیل کاهش مربوط به آنند است.
- جریان الکترون‌ها در مدار بیرونی همانند جریان پروتون‌ها در غشای مبادله‌کننده پروتون، از آنند به کاتد است.
- با برقکافت کردن فرآورده کاتدی آن در شرایط مناسب، واکنش‌دهنده آنندی سلول سوختی، در کاتد تهیه می‌شود.
- نیم‌واکنش کاتدی آن، همان نیم‌واکنش کاهش، در خوردگی آهن، در محیط اسیدی است.

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵)

۷۹ چند مورد از مطالب زیر، درباره ترکیب داده شده درست است؟



($O = 16, C = 12, H = 1, Br = 80 : g. mol^{-1}$)

- برخلاف صابون، ناقطبی بوده و گروه عاملی کربوکسیل دارد.
- برای سوختن هر مول از آن ۱۸ مول اکسیژن لازم است.
- نسبت C به H در آن با نسبت C به H در پروپن یکسان است.
- با یک مول برم مایع واکنش داده و فرآورده با جرم مولی ۳ برابر ماده اولیه تولید می‌کند.
- تنوع اعداد اکسایش اتم‌های کربن، در آن، و در ترکیب ۲- متیل بوتان برابر است.

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵)

۸۰ کدام عبارت‌ها در مورد فرآیند هال نادرست است؟

- (الف) تیغه کاتدی از جنس آلومینیوم است و قطب منفی است.
- (ب) برخلاف فرآیند آبکاری این فرآیند به کمک جریان برق انجام می‌شود.
- (پ) عدد اکسایش یکی از فرآورده‌های آن +۴ است.
- (ت) تهیه قوطی‌های آلومینیومی از قوطی‌های کهنه به روش بازیافت ۷٪ انرژی کمتری نسبت به این روش مصرف می‌کند.

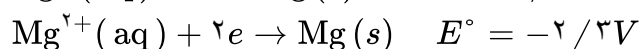
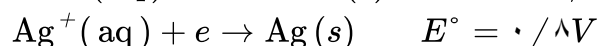
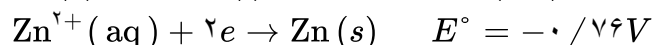
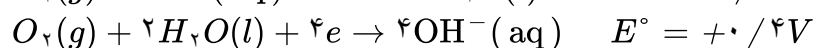
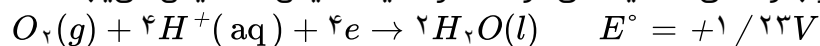
۱ الف - پ - ت (۱) ۲ الف - ب (۲) ۳ ت - پ (۳) ۴ الف - ب - ت (۴)

۸۱ چند مورد از مطالب زیر درباره آبکاری جسم X با فلز M و الکترولیت $MSO_4(aq)$ درست است؟

- در صورت استفاده از آن‌دپلاتینی، نمودار تغییر غلظت یون‌های M^{2+} محلول به صورت مقابل است.
- اگر قدرت کاهش‌دهنده فلز X از M بیشتر باشد، با قطع جریان برق واکنش $X(s) + M^{2+}(aq) \rightarrow X^{2+}(aq) + M(s)$ به طور طبیعی انجام می‌شود.
- در آنند، اتم‌های M اکسید می‌شوند و در قطب منفی، یون‌های $M^{2+}(aq)$ کاهش می‌یابد.
- قدرت اکسندگی یون‌های $M^{2+}(aq)$ باید بیشتر از قدرت اکسندگی مولکول‌های آب باشد.

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵)

با توجه به اطلاعات زیر، کدام فلز در هوای مرطوب و خنثی، اکسید نمی‌شود اما در محیط اسیدی، اکسایش می‌یابد؟



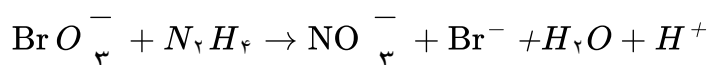
منیزیم (۴)

نقره (۳)

طلا (۲)

روی (۱)

در واکنش زیر، پس از موازنه، نسبت ضریب استوکیومتری $\frac{NO_3^-}{BrO_3^-}$ ، کدام است؟ (۸۳)



$\frac{3}{5}$ (۴)

$\frac{3}{4}$ (۳)

$\frac{6}{7}$ (۲)

$\frac{2}{3}$ (۱)

مجموع عدد اکسایش‌های اتم کربن در چه تعداد از ترکیبات زیر برابر ۴- است؟ (۸۴)

بنزن •

دی اتیل اتر •

اتیل اتانوات •

استیک اسید •

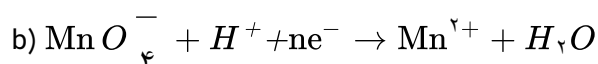
۳ (۴)

۴ (۳)

۱ (۲)

۲ (۱)

نسبت m به n در دو معادله واکنش زیر، کدام است؟ (معادلات موازنه نیستند و از هر واکنش دهنده فقط یک مول در نظر بگیرید.) (۸۵)



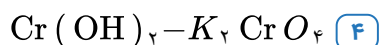
$\frac{3}{5}$ (۴)

۳ (۳)

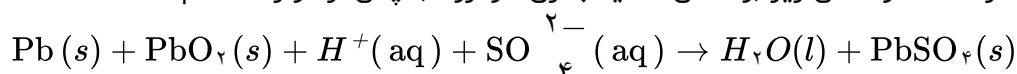
$\frac{4}{7}$ (۲)

$\frac{4}{9}$ (۱)

اتم کروم در کدام دو ترکیب، به ترتیب بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عدد اکسایش را دارد؟ (گزینه‌ها را از راست به چپ بخوانید.) (۸۶)



مجموع ضریب‌های مولی مواد در معادله واکنش زیر (واکنش تخلیه باتری خودروها)، پس از موازنه، کدام است؟ (۸۷)



۱۳ (۴)

۱۱ (۳)

۹ (۲)

۸ (۱)

در کدام مورد زیر اکسایش و کاهش صورت نگرفته است؟



۹۹ آخرین تراز انرژی عنصری به 4P^3 ختم می‌شود فرمول اکسید آن با بالاترین ظرفیت کدام است؟

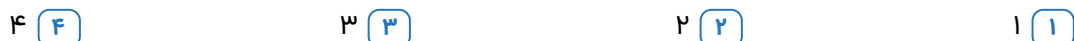


۹۰ کدام عبارت در مورد SHE درست بیان نشده است؟

- ۱) الکتروود پلاتینی که گاز هیدروژن از روی آن عبور می‌کند.
- ۲) گاز هیدروژن وارد محلولی از یک اسید با $\text{pH} = 1$ می‌شود.
- ۳) در الکتروود SHE گاز هیدروژن با فشار 1 atm وارد می‌شود.
- ۴) پتانسیل این الکتروود در تمام دماها صفر در نظر گرفته می‌شود.

۹۱ چه تعداد از عبارت‌های زیر درست است؟

آ) درجه‌ی یونش مانند ثابت یونش به غلظت اولیه‌ی اسید بستگی ندارد.
 ب) تعداد اندکی از اسیدها و بازهای شناخته‌شده ضعیف هستند.
 پ) باران اسیدی حاوی کربنیک اسید است و باران معمولی حاوی نیتریک اسید و سولفوریک اسید است.
 ت) چنانچه جرم برابری از دو اسید قوی HX و HY در مقدار برابری آب حل شوند، اسیدی که جرم مولی بیشتری دارد، pH بزرگ‌تری خواهد داشت.



۹۲ اگر غلظت مولار یک نمونه محلول هیدروبرمیک اسید (محلول I) و یک نمونه محلول فورمیک اسید (محلول II) با دمای یکسان برابر باشد، چند مورد از مطالب زیر درست است؟

- مجموع غلظت یون‌ها و مولکول‌ها در محلول I، بیشتر از مجموع غلظت آن‌ها در محلول II است.
- با افزایش غلظت اسید در یکی از محلول‌ها، درصد یونش و ثابت تعادل دو محلول به یکدیگر نزدیک‌تر می‌شود.
- با افزایش دما، غلظت یون‌ها در محلول I برخلاف محلول II تغییری نمی‌کند.
- اگر دمای دو محلول به یک اندازه بالا رود، تفاوت غلظت یون‌های موجود در دو محلول، کاهش پیدا می‌کند.



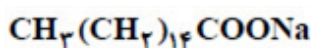
۹۳ چند مورد از مطالب زیر درباره‌ی برقکافت آب، درست است؟

- در یک سلول الکترولیتی انجام می‌شود.
- واکنش در آن با اکسایش اکسیژن همراه است.
- pH اطراف قطب آند، کمتر می‌شود.
- حجم گاز تولید شده (در شرایط یکسان) در آند و کاتد، برابر است.
- فراورده آندی و کاتدی آن، به‌ترتیب در آند و کاتد نوعی سلول سوختی، قابل استفاده است.

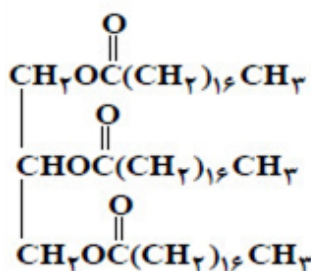


با توجه به ساختار چهار ترکیب داده شده، کدام موارد زیر درست است؟

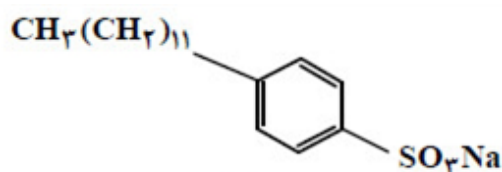
$$(H = ۱, C = ۱۲, O = ۱۶, Na = ۲۳, S = ۳۲ : g. mol^{-1})$$



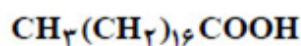
ترکیب (۱)



ترکیب (۳)



ترکیب (۲)



ترکیب (۴)

الف: قدرت پاک‌کنندگی ترکیب ۲ از قدرت پاک‌کنندگی ترکیب ۱، بیشتر است.
ب: تفاوت جرم مولی ترکیب ۱ و ۲، برابر جرم مولی چهارمین عضو خانواده آلکین است.
پ: نسبت شمار جفت الکترون پیوندی به شمار جفت الکترون ناپیوندی در آنیون ترکیب ۱، برابر ۹/۸ است.
ت: از واکنش جداگانه یک مول از ترکیب ۳ و یک مول از ترکیب ۴ با مقدار کافی سود سوزآور، ۲ مول صابون تشکیل می‌شود.

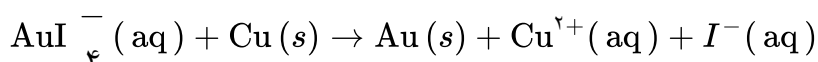
ب و پ (۴)

ب و ت (۳)

الف و پ (۲)

الف و ت (۱)

با توجه به واکنش اکسایش - کاهش زیر، پس از موازنه معادله آن، چند مورد از موارد زیر درست است؟



$$E^\circ (AuI_4^- / Au + 4I^-) = +0.56V, E^\circ (Cu^{2+} / Cu) = +0.34V$$

- این واکنش، به طور طبیعی پیش می‌رود.
- در این واکنش، ۶ مول الکترون مبادله می‌شود.
- یک یون چنداتی در این واکنش، نقش اکسنده را دارد.
- مجموع ضرایب استوکیومتری مواد در این واکنش، برابر ۱۸ است.

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

درباره فرایند زنگ زدن آهن، چند مورد از موارد زیر درست است؟

- E° واکنش کلی آن مثبت است.
- تنها فراورده نیم‌واکنش اکسایش، آنیونی محلول در آب است.
- گونه‌های اکسنده و کاهنده در واکنش کلی، به ترتیب گاز و جامدند.
- به ازای تبدیلی هر مول فلز آهن به زنگ آهن، سه مول الکترون مبادله می‌شود.

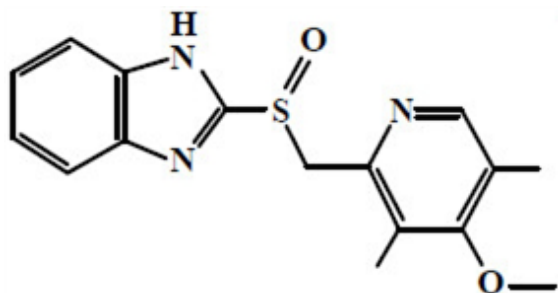
۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

درباره ترکیبی با ساختار داده شده، کدامیک از موارد زیر درست است؟
 الف: شمار پیوندهای $C-H$ با شمار اتمهای کربن در آن برابر است.
 ب: اگر اتمهای نیتروژن آن با اتم کربن جایگزین شود، ساختاری با سه حلقه بنزنی تشکیل می‌شود.
 پ: شمار اتمهای کربن در مولکول آن، با شمار این اتمها در مولکول ۳ و ۶- دی‌اتیل، ۴- متیل نونان برابر است.
 ت: شمار پیوندهای دوگانه بین اتمها، ۲ برابر شمار کل جفت‌الکترون‌های ناپیوندی روی اکسندترین اتم موجود در ساختار است.



- ۱ الف و پ ۲ الف و ت ۳ ب و پ ۴ ب و ت

۹۸ درصد یونش اسید در محلول ۰/۲ مولار اسید ضعیف HA که غلظت یون هیدرونیوم در آن برابر 4×10^{-3} مول بر لیتر باشد، کدام است؟

- ۱ ۳ ۲ ۱ ۳ ۴ ۴ ۲

۹۹ با افزودن ۱۰۰۰ میلی‌لیتر آب خالص به نیم لیتر محلول سود با $pH = 14$ ، مقدار تغییر pH کدام است؟

- ۱ ۰/۳ ۲ ۰/۴۸ ۳ ۰/۷۵ ۴ ۰/۸

۱۰۰ pH محلول ۰/۰۰۱۵ مولار اسید HA برابر ۶ است. درصد یونش این اسید، کدام است؟

- ۱ ۰/۰۶۷ ۲ ۰/۰۶۷ ۳ ۰/۰۳۳ ۴ ۰/۰۳۳

۱۰۱ چند درصد از جرم یک شوینده غیرصابونی $RC_6H_4SO_3Na$ که R شامل ۱۵ اتم کربن و سیرشده است را سدیم تشکیل می‌دهد؟ ($C = 12, H = 1, S = 32, O = 16, Na = 23 : g. mol^{-1}$)

- ۱ ۵/۹ ۲ ۶/۴ ۳ ۷/۸ ۴ ۱۰/۱

۱۰۲ مجموع تغییر عددهای اکسایش اتمهای کربن در سوختن کامل کدام هیدروکربن برابر ۱۴ است؟

- ۱ پنتان ۲ اتان ۳ پروپان ۴ بوتان

۱۰۳ در مولکول نفتالن، مجموع عدد اکسایش کربن‌هایی که به هیچ اتم هیدروژنی متصل نیستند، کدام است؟

- ۱ دو ۲ صفر ۳ یک ۴ چهار

- ۱ در سلول‌های گالوانی، جهت حرکت الکترون‌ها در مدار بیرونی از قطب منفی به قطب مثبت است.
- ۲ تیغه مس در محلول روی سولفات پس از مدت طولانی تغییری نمی‌کند.
- ۳ با پیشرفت واکنش الیاف آهن با محلول مس (II) سولفات، رنگ محلول به سمت آبی شدن پیش می‌رود.
- ۴ اغلب فلزها در واکنش با نافلزها، ضمن اکسایش به کاتیون تبدیل می‌شوند.

۱۰۵ از انحلال هر مول در آب مول یون تولید می‌شود که از دیدگاه آرنیوس است.

- ۱ دی‌نیتروژن پنتاکسید - ۲ - اسید
- ۲ دی‌نیتروژن پنتاکسید - ۴ - اسید
- ۳ کلسیم هیدروکسید - ۲ - باز
- ۴ کلسیم هیدروکسید - ۳ - اسید

۱۰۶ مقدار $\frac{n}{x}$ در نیم واکنش زیر پس از موازنه، کدام است؟ $(\text{MnO}_4^- + ne^- + x\text{H}^+ \rightarrow \text{Mn}^{2+} + \text{H}_2\text{O})$

- ۱ $\frac{5}{6}$
- ۲ $\frac{7}{8}$
- ۳ $\frac{5}{8}$
- ۴ $\frac{7}{6}$

۱۰۷ چند مورد از مطالب زیر، درست است؟

- از واکنش کامل هر مول چربی با سود سوزآور، ۳ مول صابون به دست می‌آید.
- مولکول‌های صابون در آب به صورت سوسپانسیون درمی‌آیند.
- یون‌های کلسیم و منیزیم در آب باعث کاهش غلظت صابون در آب می‌شوند.
- علاوه بر افزودن آنزیم، روش‌های دیگری نیز برای افزایش قدرت شویندگی صابون وجود دارد.

- ۱ ۱
- ۲ ۲
- ۳ ۳
- ۴ ۴

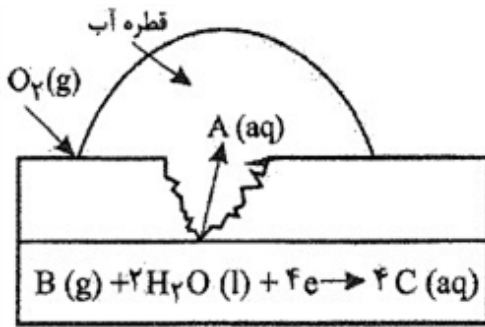
۱۰۸ رابطه بین درجه یونش و ثابت یونش برای اسید ضعیف HA در صورتی برابر $K_a = [\text{H}^+]$ است که درجه یونش آن برابر است.

- ۱ $\frac{4}{3}$
- ۲ $\frac{1}{8}$
- ۳ $\frac{1}{2}$
- ۴ $\frac{1}{4}$

۱۰۹ در یک لیتر محلول صابون ($d = 1 \text{ g. mL}^{-1}$) غلظت یون سدیم به ۵۰ ppm رسیده است. جرم کل صابون ($\text{C}_{13}\text{H}_{25}\text{COONa}$) حل شده به تقریب چند گرم بوده است؟ ($C = 12, H = 1, O = 16 : \text{g. mol}^{-1}$)

- ۱ ۰/۵
- ۲ ۰/۷۵
- ۳ ۱
- ۴ ۱/۲۵

تصویر مقابل، مربوط به یک قطعه آهن گالوانیزه خراشیده شده در هوای مرطوب است. A، B و C به ترتیب (از راست به چپ) کدام‌اند؟



- O^{2-}, H^+, Fe^{2+} (۴)
 O^{2-}, H^+, Zn^{2+} (۳)
 OH^-, O_2, Fe^{2+} (۲)
 OH^-, O_2, Zn^{2+} (۱)

$$f(x) = \begin{cases} x + 7 & x \geq 1 \\ 3x + 5 & -3 < x < 1 \\ -x - 7 & x \leq -3 \end{cases}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۱

همان‌طور که می‌بینید تابع در بازه $(-\infty, -3]$ نزولی است، ضابطه وارون تابع را در این بازه به دست می‌آوریم:

$$x \leq -3 \Rightarrow -x \geq 3 \Rightarrow -x - 7 \geq -4 \Rightarrow f(x) \geq -4 \Rightarrow D_{f^{-1}} = [-4, +\infty)$$

$$y = -x - 7 \Rightarrow -x = y + 7$$

$$x = -y - 7 \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = -x - 7$$

بنابراین ضابطه وارون تابع در بازه موردنظر، $y = -x - 7$ ، $x \geq -4$ خواهد بود.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۲

$$\cos 5x = \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow \begin{cases} 5x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow 6x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ 5x = 2k\pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow 4x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{6} + \frac{\pi}{12} \\ x = \frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{8} \end{cases}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. باقی مانده تقسیم $p(x)$ بر $x - 1$ برابر است با $p(1)$:

۳

$$p(1) = 2 \Rightarrow 1 - 3 + a - 1 = 2 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow p(x) = x^5 - 3x^4 + 5x - 1 = (x - 1)q(x) + 2$$

$$x = 2 : p(2) = -7 = q(2) + 2 \Rightarrow q(2) = -9$$

باقی مانده تقسیم $q(x)$ بر $x - 2$ ، $q(2)$ است:

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۴

تابعی که هم صعودی و هم نزولی است ثابت است.

$$f(x) = (m^x - 8)x^7 + mx - kx + k \Rightarrow m^x - 8 = 0 \Rightarrow m = 2$$

$$m = 2 \Rightarrow f(x) = 2x - kx + k \xrightarrow{k=7} f(x) = 2$$

$$f(3) + f(-1) = 2 + 2 = 4$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. f تابعی اکیداً نزولی است.

۵

$$f(f(x)) < f\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{7x}\right) \Rightarrow f(x) > \left(\left(\frac{1}{2}\right)^x\right)^7 \Rightarrow \left(\left(\frac{1}{2}\right)^x + \log_{\frac{x}{5}}\right)^7 > \left(\left(\frac{1}{2}\right)^x\right)^7$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x + \log_{\frac{x}{5}} > \left(\frac{1}{2}\right)^x \Rightarrow \log_{\frac{x}{5}} > 0 \Rightarrow 0 < x < 1$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۶

دقت کنید $a < 0$ است.

$$T = 4\pi = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = \frac{1}{2}$$

$$\max = c - a = 6$$

$$f\left(\frac{10\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow c + a \cos \frac{10\pi b}{3} = 0 \Rightarrow c + a \cos \frac{5\pi}{3} = 0 \Rightarrow c + \frac{a}{2} = 0$$

$$\begin{cases} c - a = 6 \\ c + \frac{a}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 2 \\ a = -4 \end{cases} \Rightarrow ac - |b| = -8/5$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۷

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^{x+1} - 6}{2^{x+2} + 2} = \frac{2^{-\infty} - 6}{2^{-\infty} + 2} = \frac{0 - 6}{0 + 2} = -3$$

توجه شود که $2^{-\infty} = \frac{1}{2^{+\infty}} = 0$ بنابراین حد فوق حالت مبهم ندارد.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۸

چون حاصل حد تابع در $x = 2$ هم از چپ و هم از راست برابر $-\infty$ شده است پس قطعاً مخرج کسر دارای ریشه‌ی مضاعف $x = 2$ بوده است (زیرا در غیر این صورت حد تابع در $x \rightarrow 2^+$ و $x \rightarrow 2^-$ نامتناهی ولی مختلف‌العلامه می‌شد، یعنی یکی برابر $+\infty$ و دیگری برابر $-\infty$ می‌شد)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2}{3x^2 - ax + b} = -\infty$$

$$3x^2 - ax + b = 3(x - 2)^2 \Rightarrow 3x^2 - ax + b = 3(x^2 - 4x + 4)$$

$$\Rightarrow 3x^2 - ax + b = 3x^2 - 12x + 12 \Rightarrow \begin{cases} -a = -12 \Rightarrow a = 12 \\ b = 12 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{a}{3}} \frac{x^2 - 4x + b}{-x^2 + 6x} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 4x + 12}{-x^2 + 6x} = \frac{0}{0} \text{ مبهم}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 4x + 12}{-x^2 + 6x} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x - 2)(x - 6)}{-x(x - 6)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 2}{-x} = \frac{4}{-4} = -\frac{1}{2}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۹

$$\text{مجانِب قائم } x = 3 \Rightarrow 9c - 18 - 9 = 0 \Rightarrow c = 3$$

$$\text{مجانِب افق } y = -1 \Rightarrow \frac{a}{c} = -1 \Rightarrow a = -c \Rightarrow x = -3$$

$$y = \frac{-3x^2 + bx + 2}{3x^2 - 6x - 9} = \frac{-3x^2 + bx + 2}{(x - 3)(3x + 3)}$$

$x = -1$ نمی‌تواند مجانب قائم باشد پس باید ریشه‌ی صورت باشد.

$$-3 - b + 2 = 0 \Rightarrow b = -1$$

$$\sin x \cos x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin^2 x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos^2 x \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos^2 x - \sin^2 x)$$

$$\Rightarrow \sin^2 x = \cos^2 x = \cos \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - 2x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \Rightarrow k = -2, -1, 0, 1 \Rightarrow \text{معادله ۴ جواب دارد} \\ 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} + 2x \otimes \end{cases}$$

راه حل دوم:

$$\left. \begin{aligned} \sin 2x = \cos 2x \Rightarrow \tan(2x) = 1 \\ -\pi \leq x \leq \pi \Rightarrow \underbrace{-2\pi \leq 2x \leq 2\pi}_{\text{دور ۲}} \end{aligned} \right\} \text{تعداد جواب} = 2 \times 2 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \times \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{x-1} = \hat{r} \Rightarrow \sqrt{ax^2 + bx + c} = \hat{r}(x-1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{\hat{r}(x-1)}{x-1} = \hat{r}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|ax| + \hat{r}x}{|x|} = |a| - \hat{r}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|ax| + \hat{r}x}{|x|} = |a| + \hat{r}$$

$$\xrightarrow{b < 0} \begin{cases} |a| + \hat{r} = -b \\ |a| - \hat{r} = b \end{cases} \Rightarrow a = 0, b = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 + \hat{r}x}{|x| - \hat{r}} = -3 \quad \text{پس: } f(x) = \frac{1 + \hat{r}x}{|x| - \hat{r}} \text{ لذا:}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax - \sqrt{x^2 - 1}}{\hat{r}x^n - 12} = \frac{1}{\hat{r}} \xrightarrow{n=1} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax}{\hat{r}x} = \frac{1}{\hat{r}} \Rightarrow a = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{HOP}} \frac{a - \frac{\hat{r}x}{\sqrt{x^2 - 1}}}{\hat{r}} = \frac{\frac{2}{3} - \frac{\hat{r}}{12}}{\hat{r}} = \frac{1}{\hat{r}} = \frac{1}{24}$$

$$|x-1| < 2 \Rightarrow (x-1)^2 < 4 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 < 4 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 < 0$$

$$\cos 2x + 2 \cos^2 x = 0$$

$$2 \cos^2 x - 1 + 2 \cos^2 x = 0 \Rightarrow 4 \cos^2 x - 1 = 0 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos x = \pm \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا دقت کنید که مجانب افقی تابع، منحنی را در $x = 0$ قطع کرده است پس عرض مجانب افقی و عرض تابع در $x = 0$ باهم برابر است. بنابراین:

$$\begin{cases} \text{مجانِب افقی} : \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + bx + \lambda}{x^2 + 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2}{x^2} = a \\ \Rightarrow y = a \qquad \qquad \qquad \Rightarrow a = 2 \\ x = 0 \text{ در } 0 \text{ مقدار تابع} : f(0) = \frac{0 + 0 + \lambda}{0 + 4} = 2 \end{cases}$$

از طرفی منحنی f در سمت راست محور y ها ($x > 0$) بر محور x ها مماس است. پس معادله‌ی تلاقی منحنی با خط $y = 0$ ، ریشه‌ی مضاعف دارد.

$$\frac{ax^2 + bx + \lambda}{x^2 + 4} = 0 \Rightarrow ax^2 + bx + \lambda = 0 \xrightarrow{a=2} 2x^2 + bx + \lambda = 0$$

معادله‌ی حاصل باید ریشه‌ی مضاعف داشته باشد بنابراین:

$$\Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4(2)(\lambda) = 0 \Rightarrow b^2 = 8\lambda \Rightarrow b = \pm 2\sqrt{2\lambda}$$

اما به ازای $b = 8$ ریشه منفی است، درحالی‌که باید مثبت باشد:

$$2x^2 + 8x + \lambda = 0 \Rightarrow 2(x^2 + 4x + 2) = 0 \Rightarrow 2(x + 2)^2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

$$a + b = 2 - 8 = -6$$

پس $b = -8$ قابل قبول است در نتیجه:

$$f(0) > 0 \Rightarrow \frac{a}{4} > 0 \Rightarrow a > 0$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

تابع دارای مجانب قائم مضاعف است پس:

$$\Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 16 = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} b = -4 \text{ ق ق} \\ b = 4 \rightarrow \text{مخرج} = x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2 \rightarrow \text{مجانِب قائم که قابل قبول نمی باشد} \end{cases}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{3}{2x^2 + 5x + 2} - \frac{4}{x^2 - 4} \right) &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3}{(x + 2)(2x + 1)} - \frac{4}{(x + 2)(x - 2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x - 6 - 8x - 4}{(x + 2)(2x + 1)(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-5(x + 2)}{(x + 2)(2x + 1)(x - 2)} = \frac{-5}{(-3)(-4)} = \frac{-5}{12} \end{aligned}$$

$$f(x) = a + \sin(b\pi x)$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(0) = 3 \Rightarrow a = 3$$

$$T = \frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{2}{|b|} = 5 - 1 \Rightarrow |b| = \frac{1}{4} \Rightarrow b = -\frac{1}{4} \text{ (چون تابع در ابتدا نزولی است)}$$

$$f(x) = 3 - \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) \Rightarrow f\left(\frac{25}{3}\right) = 3 - \sin\left(\frac{25\pi}{12}\right) = 3 - \frac{1}{4} = \frac{11}{4}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{\frac{2x-1}{x+2} + 3}{\frac{2x-2}{x+2} + 1} = \frac{2x - 1 + 3x + 6}{2x - 2 + x + 2} = \frac{5x + 5}{5x} = \frac{x + 1}{x}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} \text{مجانِب قائم} \\ x = 0 \\ \text{مجانِب افقی} \\ y = 1 \end{cases}$$

۲۱

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر دترمینان ماتریس را با استفاده از دستور ساروس محاسبه کنیم، داریم:

$$\begin{aligned} 3(x-2)(x+2) - 2(x+3)(x-3) &= 10 \Rightarrow 3(x^2 - 4) - 2(x^2 - 9) = 10 \\ \Rightarrow 3x^2 - 12 - 2x^2 + 18 &= 10 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \end{aligned}$$

۲۲

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. وارون یک ماتریس برابر خود آن ماتریس است، پس داریم:

$$\begin{aligned} A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \frac{1}{-2+3} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow a = -1, d = 2 \\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow ax + dy = 1 + 2 = 3 \end{aligned}$$

۲۳

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

ابتدا مختصات مراکز دو دایره را پیدا کرده، مساوی هم قرار می‌دهیم.

$$\begin{aligned} O\left(-\frac{a}{r}, -\frac{b}{r}\right) = \left(-\frac{m}{r}, -\frac{2}{r}\right) \\ O'\left(-\frac{a}{r}, -\frac{b}{r}\right) = \left(1, -\frac{n}{r}\right) \end{aligned} \xrightarrow{O=O'} \begin{cases} -\frac{m}{r} = 1 \Rightarrow m = -r \\ -\frac{n}{r} = -2 \Rightarrow n = 2r \end{cases}$$

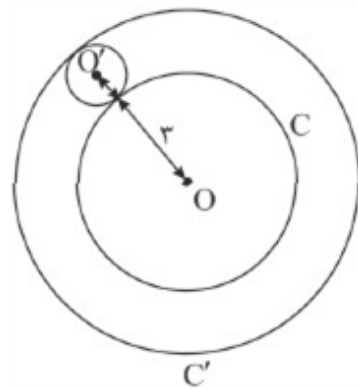
بنابراین:

$$C : x^2 + y^2 - 2x + 4y = 4 \Rightarrow R = \frac{\sqrt{4 + 16 + 16}}{2} = 3$$

$$C' : x^2 + y^2 - 2x + 4y = 11 \Rightarrow R' = \frac{\sqrt{4 + 16 + 44}}{2} = 4$$

مطابق شکل مرکز دایره‌هایی که به دو دایره‌ی C و C' مماس هستند، از مرکز O به فاصله‌ی $3/5$ قرار دارند، پس مکان هندسی مرکز این دایره‌ها، دایره‌ای به مرکز $O(1, -2)$ و شعاع $\frac{5}{2}$ است.

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = \frac{49}{4}$$



۲۴

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

ابتدا معادله‌ی دایره را به صورت استاندارد می‌نویسیم.

$$9(x-2)^2 + (1-3y)^2 = k^2 \Rightarrow 9(x-2)^2 + (-3)^2 \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = k^2 \xrightarrow{\div 9} (x-2)^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{k^2}{9}$$

پس $R^2 = \frac{k^2}{9}$ است. بنابر فرض سؤال $R = 4$ و $2R = 8$ است. داریم:

$$16 = \frac{k^2}{9} \Rightarrow k^2 = 9 \times 16 \Rightarrow k = \pm(3 \times 4) = \pm 12$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

مقدار $|A|$ برابر ۲- است.

پس $|A^{-1}| = -\frac{1}{2}$ است و داریم:

$$B = \begin{bmatrix} |B| & |A| \\ |B^{-1}| & |A^{-1}| \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{دترمینان می گیریم}} |B| = \begin{vmatrix} |B| & -2 \\ \frac{1}{|B|} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow |B| = \frac{-|B|}{2} + \frac{2}{|B|} \Rightarrow 2|B|^2 = -|B|^2 + 4 \Rightarrow 3|B|^2 = 4 \Rightarrow |B|^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow |B| = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$|-B| = (-1)^2 |B| = |B| = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

می‌دانیم ماتریس $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ عضو خنثی ضرب است پس تساوی داده شده به صورت زیر است:

$$A \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{طرفین را از سمت راست در وارون} \\ \text{ماتریس دوم ضرب می کنیم}}} A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \left(\frac{1}{1} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \right) \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$A^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} -7 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های ماتریس A^{-1} برابر $\frac{11}{3} = \frac{7}{3} + \frac{1}{3} + 1$ است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$A^T + A^T + A + I = \bar{O} \Rightarrow A^T = -A^T - A - I \quad (1)$$

$$A^T + A^T + A + I = \bar{O} \Rightarrow -A^T - A^T - A = I$$

$$\Rightarrow A(-A^T - A - I) = I \Rightarrow A^{-1} = -A^T - A - I \xrightarrow{(1)} A^{-1} = A^T$$

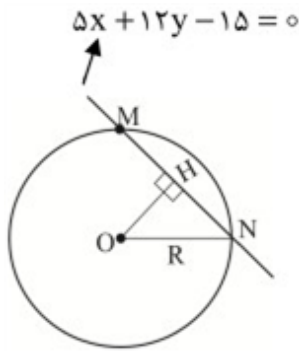
گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$AB = B + 2I \Rightarrow AB - B = 2I \Rightarrow (A - I)B = 2I \Rightarrow \left(\frac{A - I}{2} \right) B = I$$

یعنی ماتریس B ، وارون ماتریس $\frac{A - I}{2}$ است، داریم:

$$A - I = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow (A - I)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \left(\frac{1}{2} (A - I) \right)^{-1} = 2(A - I)^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$



$$MN = 2\sqrt{21} = 2\sqrt{21} \rightarrow HN = \sqrt{21}$$

$$OH = \frac{|5(1) + 12(2) - 15|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = 2$$

فیتاغورث $\triangle OHN$: $R^2 = OH^2 + HN^2 \rightarrow R^2 = 2^2 + (\sqrt{21})^2 \rightarrow R = 5$

محل برخورد با محور x ها ($y = 0$): $(x - 1)^2 + 9 = 25 \rightarrow (x - 1)^2 = 16 \begin{cases} x_2 = 5 \\ x_1 = -3 \end{cases}$

$AB = \text{طول وتر} = x_2 - x_1 = 8$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با فرض $A^{-1} + B^{-1} = M$ رابطه را از سمت چپ در A و از سمت راست در B ضرب می‌کنیم:

$$A^{-1} + B^{-1} = M \xrightarrow{\text{چپ} \times A} I + A \cdot B^{-1} = AM \xrightarrow{\text{راست} \times B}$$

$$B + A \cdot B^{-1} \cdot B = AMB \Rightarrow B + A = AMB \xrightarrow{\text{اعمال دترمینان}}$$

$$|A + B| = |A| \times |M| \times |B| \Rightarrow -30 = |AB| \times |M| \Rightarrow -30 = -2 \times |M| \Rightarrow |M| = 15$$

$$\Rightarrow |A^{-1} + B^{-1}| = 15$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۳۱

$$\left. \begin{array}{l} 5 \quad 5 \\ a \equiv 1 \equiv -4 \\ 3 \quad 3 \\ a \equiv 2 \equiv -4 \\ 7 \quad 7 \\ a \equiv 2 \equiv -4 \end{array} \right\} \Rightarrow a \equiv \equiv \equiv -4 \Rightarrow a \equiv -4$$

$$\Rightarrow a = 105q - 4 \xrightarrow{\text{اولین چهاررقمی } q=10} a = 1046$$

$$\Rightarrow a \equiv 6 - 4 + 0 - 1 \equiv 1$$

پس باقی‌مانده‌ی $a = 1046$ بر ۱۱ برابر ۱ می‌باشد.

$$y(3x - 1) + 5x - 8 = 0 \Rightarrow y(3x - 1) = -5x + 8 \Rightarrow y = \frac{-5x + 8}{3x - 1}$$

$$x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{-5x + 8}{3x - 1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 3x - 1 \mid -5x + 8$$

حال از رابطه بدیهی $3x - 1 \mid 3x - 1$ به عنوان رابطه کمکی استفاده می‌کنیم:

$$3x - 1 \mid -5x + 8 \Rightarrow 3x - 1 \mid -15x + 24 \Rightarrow 3x - 1 \mid 19$$

$$3x - 1 \mid 3x - 1 \Rightarrow 3x - 1 \mid 15x - 5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x - 1 = -1 \Rightarrow x = 0 \in \mathbb{Z}, y = -8 \\ 3x - 1 = 1 \Rightarrow x \notin \mathbb{Z} \\ 3x - 1 = -19 \Rightarrow x = -6 \in \mathbb{Z}, y = -2 \\ 3x - 1 = 19 \Rightarrow x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

باقی‌مانده دو عدد بر ۹۹ یکسان است، پس دو عدد به پیمانه ۹۹ و مقسوم‌علیه‌های آن یعنی ۹ و ۱۱ نیز هم‌نهشت هستند:

$$\overline{a5b} + c \equiv \overline{a5bc}$$

$$\Rightarrow b - 5 + a + c \equiv c - b + 5 - a \Rightarrow 2a + 2b \equiv 10$$

$$\Rightarrow a + b \equiv 5 \Rightarrow \begin{cases} a + b = 5 \longrightarrow \begin{array}{c|c} a & b \\ \hline 5 & 0 \\ 4 & 1 \\ 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{array} \\ a + b = 16 \longrightarrow \begin{array}{c|c} a & b \\ \hline 9 & 7 \\ 7 & 9 \\ 8 & 8 \end{array} \end{cases}$$

$$\overline{a5b} + c \equiv \overline{a5bc} \Rightarrow a + 5 + b + c \equiv a + 5 + b + c$$

چون c مقادیر ۰، ۱، ۲، ... و ۹ را می‌تواند انتخاب کنید، پس برای هر a ، b و c ، ده مقدار دارد، بنابراین ۸۰ عدد یافت می‌شود.

در ماه‌های ۳۰ روزه فقط در صورتی که روز اول یا دوم ماه یکشنبه باشد، آن ماه دارای ۵ تا یکشنبه می‌شود (در غیر این صورت ۴ تا یکشنبه دارد)، روز اول هر ماه را به دست می‌آوریم:

$$\begin{array}{c} \text{اول مهرماه} \\ \uparrow \gamma \\ (\underbrace{31 - 3}_{\text{تا انتهای اردیبهشت}}) + \underbrace{4 \times 31 + 1}_{\text{تا انتهای تابستان}} \equiv 0 + 5 + 1 = 6 \end{array}$$

روز اول مهر، شنبه و روز دوم مهر، یکشنبه است، پس همین گزینه درست است.
اگر ۳۰ روز جلو برویم به اول آبان می‌رسیم یعنی:

$$30 + 6 \equiv 1 \rightarrow \text{اول آبان دوشنبه}$$

$$30 + 1 \equiv 3 \rightarrow \text{اول آذر چهارشنبه}$$

$$30 + 3 \equiv 5 \rightarrow \text{اول دی جمعه}$$

می‌دانیم اگر $a \equiv b^m$ و $k|m$ ، آن‌گاه $a \equiv b^k$ است.

$$a \equiv 17^{21} \rightarrow a \equiv 17^{\gamma 21} \equiv 3^{\gamma} \Rightarrow a^{\gamma} \equiv 9^{\gamma} \equiv 2$$

$$b \equiv 13^{35} \rightarrow b \equiv 13^{\gamma 35} \equiv -1^{\gamma} \Rightarrow b^{\gamma} \equiv 1$$

پس داریم:

$$a^{\gamma} b + b a^{\gamma} \equiv -2 + 3 \equiv 1$$

$$12|d + 12 \Rightarrow 12|d \Rightarrow d = 12k$$

$$d|1200 + d \Rightarrow d|1200 \Rightarrow 12k|1200 \Rightarrow k|100 \xrightarrow{100=2 \times 5^2} T(100) = (2+1)(2+1) = 9$$

$$\Rightarrow k \in \{1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100\}$$

بنابراین ۹ عدد طبیعی با این شرایط وجود دارد:

$$d = 12, 24, 48, 60, 120, 240, 300, 600, 1200$$

توجه ۱:

$$a | a + b \rightarrow a | b$$

توجه ۲:

$$\left\{ \begin{array}{l} N = P_1^{\alpha_1} \times P_2^{\alpha_2} \times \dots \times P_n^{\alpha_n} \rightarrow T(N) = \text{تعداد مقسوم علیه} = (\alpha_1 + 1) \times \dots \times (\alpha_n + 1) \\ \alpha_i \neq 0 \\ P_i = \text{عدد اول} \end{array} \right.$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۳۷

$$(4n-1, 6n+2) = d \Rightarrow \begin{cases} d|4n-1 \Rightarrow d|12n-3 \\ d|6n+2 \Rightarrow d|12n+4 \end{cases} \Rightarrow d|7 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } 7$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۳۸

چون $N(a) = N(b)$ ، پس رئوسی که به a وصل هستند به b هم وصل هستند، پس $\deg(a) = \deg(b)$ درست است. می‌دانیم اگر $N(a) = N(b)$ باشد، a و b مجاور نمی‌باشند چون در غیر این صورت $a \in N(a)$ که امکان‌پذیر نمی‌باشد، پس گزینه (۴) هم درست است.

با توجه به مطالب قبل چون $ab \notin E$ ، تساوی $N_G[a] = N_G[b]$ برقرار نیست، چون $a \in N_G[a]$ می‌باشد، پس $a \in N_G[b]$ برقرار است و در نتیجه باید $ab \in E$ باشد که امکان‌پذیر نیست.

و در آخر چون $ab \notin E$ ، پس در گراف \bar{G} ، a و b مجاورند و با توجه به این‌که $N_G(a) = N_G(b)$ برقرار است، تساوی $N_{\bar{G}}[a] = N_{\bar{G}}[b]$ برقرار است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۳۹

$$p + q = 120 \Rightarrow p + \binom{p}{2} = 120 \Rightarrow \binom{p+1}{2} = 120 = \binom{16}{2} \\ \Rightarrow p+1 = 16 \Rightarrow p = 15$$

بنابراین:

$$q - p = \binom{15}{2} - 15 = 105 - 15 = 90$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. شرط وجود جواب برای معادله $ax + by = c$ آن است که $(a, b) | c$ یعنی $(3a-1, a+2) | 98$ پس لازم است ب.م.م $a+2$ و $3a-1$ محاسبه شود.

$$(3a-1, a+2) = d \xrightarrow{\text{طبق تعریف}} \begin{cases} d|3a-1 \Rightarrow d|3a-1 \\ d|a+2 \Rightarrow d|3a+6 \end{cases} \Rightarrow d|7$$

یعنی $d = 1$ یا $d = 7$ که در هر دو حالت ۹۸ بر هر دو بخش‌پذیر است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۴۱

نمودار مکان - زمان خط راست است، پس یک حرکت با سرعت ثابت داریم که سرعت لحظه‌ای متحرک در هر لحظه و سرعت متوسط آن در تمامی بازه‌های زمانی یکسان است.

$$v_{av} = v \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0 - 100}{8} = -12.5 \frac{m}{s} \Rightarrow |v_{av}| = 12.5 \frac{m}{s}$$

$$\begin{cases} x = 5t^2 + 30t + 20 \\ x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}a = -5 \Rightarrow a = -10 \frac{m}{s^2} \\ v_0 = 30 \frac{m}{s} \\ x_0 = 20 m \end{cases}$$

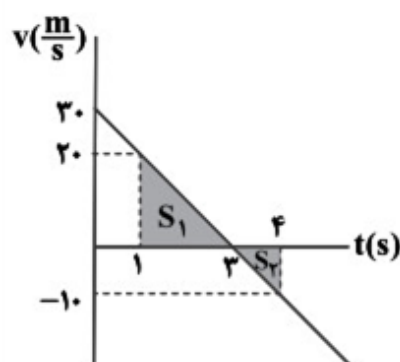
$$v = at + v_0 \Rightarrow v = -10t + 30$$

نمودار سرعت - زمان را رسم می‌کنیم:

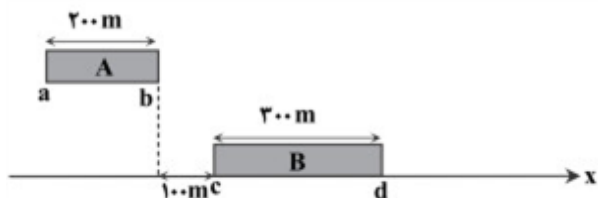
مساحت سطح زیر نمودار سرعت - زمان با رعایت علامت، برابر جابه‌جایی و مجموع تمام مساحت‌ها با علامت مثبت، برابر مسافت طی شده است.

$$\Delta x = S_1 - S_2 = \left(\frac{2 \times 20}{2} \right) - \left(\frac{10 \times 1}{2} \right) = 15 m \Rightarrow \Delta x = 15 m$$

$$l = S_1 + S_2 = \frac{2 \times 20}{2} + \frac{10 \times 1}{2} = 25 m$$



گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



برای آنکه قطار A کاملاً از قطار B سبقت بگیرد، باید انتهای قطار A به ابتدای قطار B برسد:

$$x_a = s_d \Rightarrow v_A t + x_{a_0} = v_B t + x_{d_0} \Rightarrow v_A t = v_B t + (x_{d_0} - x_{a_0}) \Rightarrow 30t = 20t + 600$$

$$\Rightarrow 10t = 600 \Rightarrow t = 60s = 1 \text{ min}$$

روش دوم: می‌توانستیم قطار B را ساکن فرض کنیم و قطار A با تندی به اندازه‌ی تفاضل تندی دو قطار به طرف آن در حرکت باشد. برای سبقت کامل باید انتهای قطار A (a) از ابتدای قطار B (d) کاملاً عبور کند، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\Delta x = v_{\text{نسبی}} \times t \Rightarrow (200 + 100 + 300) = (30 - 20) \Delta t \Rightarrow 600 = 10 \Delta t \Rightarrow \Delta t = 60s = 1 \text{ min}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون نمودار مکان - زمان به صورت خط راست است، حرکت هر دو متحرک با سرعت ثابت است. سرعت ثابت هر متحرک را می‌توان از شیب هر خط محاسبه نمود.

$$v_A = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{8 - 0}{3 - 2} = 8 \frac{m}{s} \Rightarrow 8 = \frac{0 - x_A}{2 - 0} \Rightarrow x_A = -16m$$

$$v_B = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{8 - 20}{3 - 0} = \frac{-12}{3} = -4 \frac{m}{s}$$

$$x_B = v_B t + x_{B,0} \Rightarrow x_B = -4t + 20 \Rightarrow 0 = -4t + 20 \Rightarrow t = 5s$$

$$x_A = v_A t + x_{A,0} \Rightarrow x_A = 8t - 16 \Rightarrow x_A = 8 \times 5 - 16 = 40 - 16 = 24m$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به نمودار مکان - زمان ذره، حرکت ذره سرعت ثابت است.

$$v = v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{8 - (-4)}{6 - 0} = 2 \frac{m}{s}$$

$$x = vt + x_0 \Rightarrow x = 2t - 4$$

$$t = 20s \Rightarrow x = (2 \times 20) - 4 = 36m$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

شیب خط نمودار سرعت - زمان هر دو متحرک ثابت است، بنابراین حرکت هر دو متحرک شتاب ثابت است.

$$A: v, g \text{ و } a = a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{12}{2} = 6 \frac{m}{s^2} \text{ و } x_0 = 5m$$

$$B: v_0 = 10 \frac{m}{s} \text{ و } a = a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{12 - 10}{2} = 1 \frac{m}{s^2} \text{ و } x_0 = 5m$$

$$x_A = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t + x_0 = 3t^2 + 5 \text{ و } x_B = \frac{1}{2} t^2 + 10t + 5$$

$$\text{فاصله دو متحرک} = |x_A - x_B| = \left| \frac{5}{2} t^2 - 10t \right|$$

$$t = 6s \Rightarrow |x_A - x_B| = \left| \frac{5}{2} \times 36 - 60 \right| = 30m$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a\Delta x \Rightarrow 30^2 - 10^2 = 2a \times (85 - 45) \Rightarrow (30 - 10)(30 + 10) = 80a \Rightarrow a = 10 \frac{m}{s^2}$$

$$v = at + v_0 \Rightarrow 10 = 3 \times 10 + v_0 \Rightarrow v_0 = -20 \frac{m}{s}$$

$$v = at + v_0 \Rightarrow 50 = 10t - 20 \Rightarrow t = 7s$$

مسافت طی شده روی خط راست، برابر مجموع بزرگی جابه‌جایی‌های متحرک قبل و بعد از تغییر جهت است.

$$x = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t + x_0 \rightarrow a = 6 \frac{m}{s^2}, v_0 = -30 \frac{m}{s}, x_0 = 12 m$$

$$v = at + v_0 \Rightarrow v = 6t - 30 \xrightarrow{v=0} t = 5s$$

متحرک در $t = 5s$ تغییر جهت داده است. بنابراین مسافت طی شده در بازه‌ی $(0, 10s)$ برابر مجموع اندازه‌ی جابه‌جایی‌های متحرک در بازه‌های $(0, 5s)$ و $(5s, 10s)$ است.

$$l = |x_{5s} - x_0| + |x_{10s} - x_{5s}| = 75 + 75 = 150 m$$

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{150}{10} = 15 \frac{m}{s}$$

راه حل دوم:

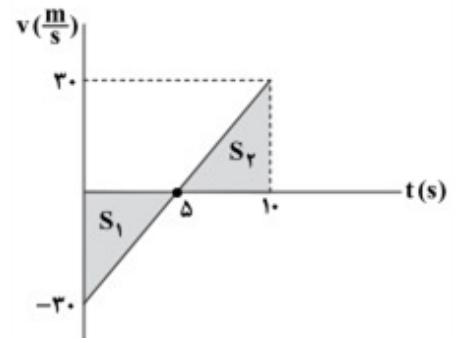
مسافت طی شده در یک حرکت برابر مجموع سطح‌های محصور به نمودار سرعت و محور زمان است.

$$v = aT + V_0 \Rightarrow V_0 = 6T - 30$$

با رسم نمودار $V - T$ و محاسبه‌ی سطح محصور بین نمودار و محور زمان داریم:

$$l = S_1 + S_2 = 2S_1 = 2 \times 75 = 150 m$$

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{150}{10} = 15 \frac{m}{s}$$



با توجه به آنکه شتاب حرکت جسم A مثبت است، حرکت کندشونده A در مدتی انجام می‌شود که سرعت آن منفی است.

$$\frac{4}{8} = \frac{6-t}{t} \Rightarrow t = 12 - 2t$$

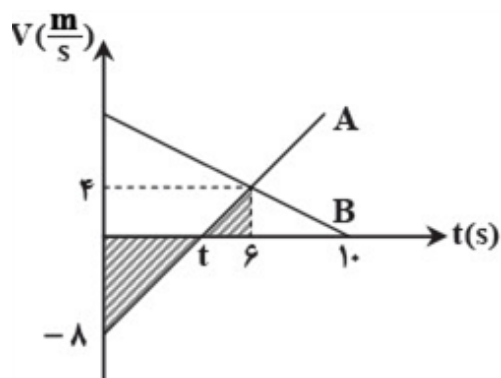
$$\Rightarrow 3t = 12 \Rightarrow t = 4s$$

$$\text{شیب نمودار سرعت - زمان} : a_B = \frac{-4}{10-6} = -1 \frac{m}{s^2}$$

$$\text{برای متحرک B} : V = at + V_0 \Rightarrow 0 = -1 \times 10 + V_0$$

$$\Rightarrow V_0 = 10 \frac{m}{s}$$

$$\Delta x_B = \frac{1}{2} at^2 + V_0 t = \frac{1}{2} (-1) \times 4^2 + 10 \times 4 = 32m$$



گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$V = \frac{dx}{dt} = 2t - 8 \xrightarrow{\text{ریشه}} t = 4s$$

در $t = 4s$ جهت حرکت عوض می‌شود.

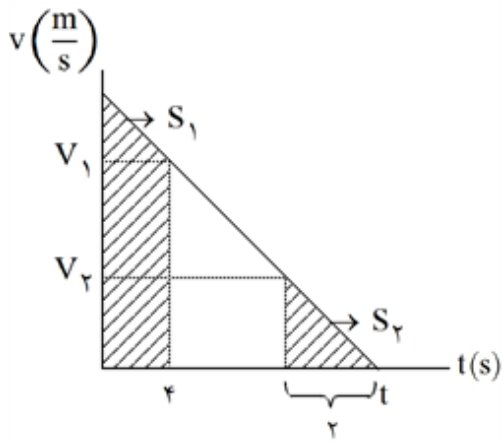
$$d = |x(4) - x(0)| + |x(10) - x(4)| = av_s(-16) + |40 - 4| = 52m$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به نمودار در بازه‌ی زمانی t' تا $12s$ حرکت تندشونده است چون V و a هر دو مثبت

و هم‌علامت هستند (اندازه‌ی V در حال افزایش است)، بنابراین سرعت متوسط در این بازه را به دست می‌آوریم.

$$\left. \begin{aligned} \bar{V} &= \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ \Delta x = \text{مساحت زیر نمودار} &= \frac{1}{2} \times 18 \times (12 - t') \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bar{V} = \frac{\frac{1}{2} \times 18 \times (12 - t')}{(12 - t')} = 9 \frac{m}{s}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به ثابت بودن شیب داریم: ۵۲



$$\frac{20 - V_1}{4} = \frac{V_1}{4} \Rightarrow 20 - V_1 = 2V_1 \quad (1)$$

$$S_1 = 36S_2$$

$$\frac{(20 + V_1) \times 4}{4} = 36 \frac{V_1 \times 4}{4} \Rightarrow 20 + V_1 = 18V_1 \quad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow 40 = 20V_1 \Rightarrow V_1 = 2 \frac{m}{s}$$

$$a = \frac{0 - V_1}{4} = -1 \frac{m}{s^2}$$

$$t = 12 \text{ تندی در لحظه } = \frac{240}{8} = 30 \frac{m}{s}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۵۳

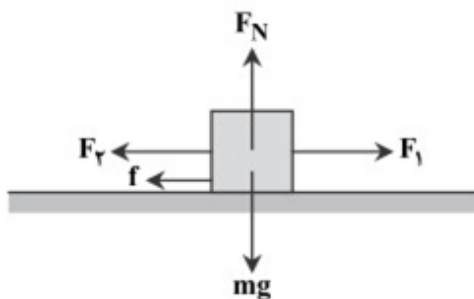
$$t = 2 \text{ تندی} = \frac{\Delta x}{12} = 30 \Rightarrow \Delta x = 360 \text{ m} \Rightarrow x_{14} - x_2 = 360 \Rightarrow x_{14} = 420$$

$$t = 14 \text{ تا}$$

$$\frac{V_{14-2}}{V_{13-14}} = \frac{\Delta x_{14-2}}{\Delta x_{13-14}} = \frac{60}{180} = \frac{1}{3}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۵۴

در راستای قائم نیروی خالص وارد بر وزنه صفر است:



$$F_N - mg = 0 \Rightarrow F_N = 150 \text{ N} \rightarrow \text{اندازه‌ی نیروی عمودی سطح}$$

$$f_{s_{\max}} = \mu_s F_N = 150 \times 0.6 = 90 \text{ N}$$

$$F_1 - F_2 = 100 - 25 = 75 \text{ N} < 90 \text{ N} \Rightarrow \text{جسم ساکن است}$$

در راستای افقی نیروی خالص وارد بر جسم صفر است:

$$F_1 - F_2 - f_s = 0 \Rightarrow f_s = 75 \text{ N}$$

$$R = \sqrt{F_N^2 + f_s^2} = \sqrt{150^2 + 75^2} = 75\sqrt{5} \text{ N}$$

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{G \frac{M_e m}{(R_e + h)^2}}{G \frac{M_e m}{R_e^2}} = \left(\frac{R_e}{R_e + h} \right)^2$$

چون با افزایش فاصله جسم از مرکز زمین، وزن کم می‌شود، پس ۳۶ درصد تغییر وزن، به صورت کاهشی خواهد بود.

$$یعنی \quad W_2 = W_1 - \frac{36}{100} W_1 \quad \text{است.}$$

$$\frac{W_1 - \frac{36}{100} W_1}{W_1} = \left(\frac{R_e}{R_e + h} \right)^2 \Rightarrow 0.64 = \left(\frac{R_e}{R_e + h} \right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{R_e}{R_e + h} = 0.8 \Rightarrow h = \frac{1}{4} \times 6400 = 1600 \text{ km}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. طبق قانون سوم نیوتون نیروهای کنش و واکنش، هم‌اندازه و خلاف جهت هم بر دو جسم وارد می‌شوند: ۵۶

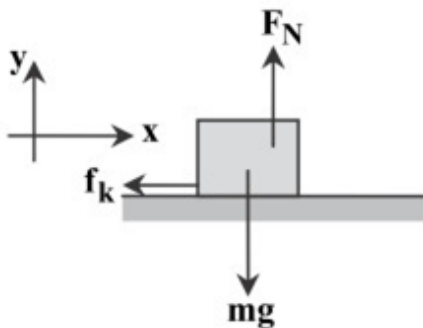
$$\vec{F}_{1,2} = m_2 \vec{a}_2 = 50 \times 2 \vec{i} = (+100 \text{ N}) \vec{i} \quad \text{کنش} \Rightarrow \vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1} \Rightarrow \vec{F}_{1,2} = (-100 \text{ N}) \vec{i} \quad \text{واکنش}$$

$$\vec{F}_{1,2} = m_1 \vec{a}_1 \Rightarrow (-100 \text{ N}) \vec{i} = (100 \text{ kg}) \vec{a}_1 \Rightarrow \vec{a}_1 = \left(-1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \vec{i}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۵۷

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a\Delta x \Rightarrow 0 - 4 = 2 \times a \times 0.8 \Rightarrow a = -2.5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

از لحظه‌ای که جعبه را رها می‌کنیم نیروهای وارد بر آن، مطابق شکل است.



$$F_{\text{net}(y)} = 0 \Rightarrow F_N - mg = 0$$

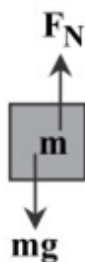
$$F_{\text{net}(x)} = ma \Rightarrow -f_k = ma \Rightarrow -\mu_k F_N = ma$$

$$\Rightarrow -\mu_k mg = ma \Rightarrow a = -\mu_k g \Rightarrow -\frac{5}{2} = -10 \mu_k \Rightarrow \mu_k = \frac{1}{4}$$

توجه کنید که جرم جعبه در محاسبه‌ی فوق نقشی ندارد.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

طبق قانون سوم نیوتون، اندازه‌ی نیرویی که جعبه به کف آسانسور وارد می‌کند، برابر است با اندازه‌ی نیرویی که کف آسانسور به جعبه وارد می‌کند. نیروهای وارد بر جعبه مطابق شکل است. چون حرکت جسم کندشونده است، شتاب و سرعت آن در خلاف جهت هم هستند. یعنی جهت شتاب و در نتیجه نیروی خالص به طرف بالا است.



$$F_{\text{net}} = MA \Rightarrow F_N - mg = ma \Rightarrow F_N - 100 = 10 \times 1 \Rightarrow F_N = 110 \text{ N}$$

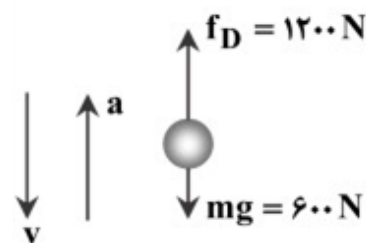
گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

پس از باز شدن چتر، در ابتدا برابری نیروها رو به بالا و جهت حرکت رو به پایین است و حرکت کندشونده است، پس: $a, v < 0$

مقاومت هوا تابع تندی جسم است، چون تندی چتر باز پس از باز کردن چتر کاهش می‌یابد. مقاومت هوا نیز کاهش می‌یابد، بنابراین طبق قانون دوم نیوتون بزرگی شتاب کاهش می‌یابد.

$$mg - f_D = ma \Rightarrow a = g - \frac{f_D}{m}$$

پس از مدتی اندازه‌ی مقاومت هوا برابر وزن چتر باز و چتر می‌شود و تندی چتر باز ثابت می‌ماند. (تندی حدی)



گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$K_2 = K_1 - \frac{91}{100} K_1 \Rightarrow \frac{1}{2} m V_2^2 = \frac{9}{100} \times \frac{1}{2} m V_1^2 \Rightarrow V_2 = \frac{3}{10} V_1$$

$$\Rightarrow m V_2 = \frac{3}{10} m V_1 \Rightarrow P_2 = \frac{3}{10} P_1$$

$$\Delta P = P_2 - P_1 = 0.3 P_1 - P_1 = -0.7 P_1$$

تکانه جسم ۷۰٪ کاهش یافته است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. جرم جسم به شتاب گرانشی ربطی ندارد و رابطه‌ی شتاب گرانشی، $G = \frac{M_e}{r^2}$ است که در

آن $r = R_e + h$ و M_e جرم زمین است.

$$\frac{g'}{g} = G \frac{M}{(R_e + h)^2} \Rightarrow \frac{g'}{g} = \left(\frac{R_e}{R_e + h} \right)^2 = \left(\frac{R_e}{4 R_e} \right)^2 = \frac{1}{16}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۶۲

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow f_s - mg = 0 \Rightarrow f_s = mg$$

با زیاد شدن F مقدار N زیاد می‌شود اما f_s زیاد نمی‌شود، زیرا f_s به اندازه‌ای وارد می‌شود که $\Sigma F_y = 0$ باشد.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۶۳

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \Rightarrow \frac{T'}{T} = \sqrt{\frac{L'}{L}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{L'}{L}}$$

$$L' = \frac{1}{4}L$$

پس طول آونگ باید $\frac{1}{4}$ برابر گردد، یعنی ۷۵ درصد باید طول آونگ را کاهش دهیم.

$$E = \frac{1}{2}KA^2 = \frac{1}{2} \times 100 \times \frac{16}{100} = 8J$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۶۴

$$K = E - u = 8 - 6 = 2J$$

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow 2 = \frac{1}{2} \times 1 \times v^2 \Rightarrow v^2 = 4 \Rightarrow v = 2 \frac{m}{s}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۶۵

$$x = A \cos \omega t \Rightarrow 4/5 = 9 \cos \omega t_1 \rightarrow \cos \frac{\pi}{3} = \cos \omega t_1 \rightarrow \omega t_1 = \frac{\pi}{3}$$

$$4/5 = 9 \cos \omega t_2 \xrightarrow{\text{با توجه به شکل}} \cos \frac{5\pi}{3} = \cos \omega t_2 \rightarrow \omega t_2 = \frac{5\pi}{3}$$

$$\omega t_2 - \omega t_1 = \frac{5\pi}{3} - \frac{\pi}{3} \rightarrow \omega(t_2 - t_1) = \frac{4\pi}{3} \rightarrow \omega = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{\text{rad}}{s} \right)$$

$$|s_{\max}| = A\omega^2 = (9 \times 10^{-2}) \left(\frac{4\pi}{3} \right)^2 = 176 \frac{m}{s^2}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۶۶

$$x = A \cos \omega t$$

$$-15 = 30 \cos(\omega \times 0.2) \Rightarrow \frac{-1}{2} = \cos(0.2\omega) \rightarrow \cos \frac{2\pi}{3} = \cos 0.2\omega \text{ با توجه به شکل:}$$

$$0.2\omega = \frac{2\pi}{3} \rightarrow \omega = \frac{20\pi}{3} \left(\frac{\text{rad}}{s} \right)$$

$$V_{\max} = A\omega = 0.3 \times \frac{20\pi}{3} = 2\pi \left(\frac{m}{s} \right)$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چون هر یک ثانیه یک بار به میله ضربه وارد می‌شود دوره وارد شدن ضربه و نیرو $T = 1$ s است. بنابراین، دروه هر کدام از آونگها ۱ s باشد، با ضربات وارده به میله، آن آونگ، در حالت تشدید قرار گرفته و با بیشترین دامنه نوسان خواهد کرد.

بنابراین، با استفاده از رابطه $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ طول آونگی که دوره آن ۱ s است را می‌یابیم:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \xrightarrow[T = 1s]{\pi = \sqrt{g}} 1 = 2 \times \sqrt{g} \times \sqrt{\frac{L}{g}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \sqrt{L} \Rightarrow L = \frac{1}{4} m \Rightarrow L = 25 \text{ cm}$$

بنابراین، آونگهای ۱ و ۳ با طول ۲۵ cm، در اثر پدیده تشدید، با بیشترین دامنه، نوسان خواهند کرد. دقت کنید، جرم آونگ در دوره تناوب آن تأثیری ندارد.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. طبق معادله مکان - زمان نوسانگر داریم:

$$x = \frac{2}{100} \cos 20\pi t, \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow 20\pi = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{1}{10} s$$

$$T \times 40 = \frac{1}{10} \times 40 = 4 s$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. وقتی دما زیاد می‌شود طول و در نتیجه، زمان تناوب افزایش می‌یابد و آونگ عقب می‌افتد.

$$l_2 = 1/691, \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{l_2}{l_1}} \Rightarrow T_2 = \sqrt{1/69} = 1/3 \Rightarrow T_2 = 1/3 T_1$$

پس دوره‌ی آونگ ۳۰ درصد زیاد می‌شود.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. وقتی انرژی پتانسیل و انرژی جنبشی نوسانگر با هم برابر باشند، اندازه‌ی آن‌ها برابر با نصف انرژی مکانیکی (انرژی کل) نوسانگر خواهد بود، یعنی:

$$K = U = \frac{E}{2}$$

در حالت برابر بودن انرژی پتانسیل و جنبشی نوسانگر، اندازه‌ی بعد حرکت برابر خواهد بود با:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} x_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{2} A$$

$$v = \frac{\sqrt{2}}{2} v_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{2} A\omega$$

و تندی نوسانگر نیز برابر خواهد بود با:

با استفاده از روابط فوق می‌توان نوشت:

$$v = \frac{\sqrt{2}}{2} A\omega \xrightarrow[A = 0/04 \text{ m}, \omega = 2\pi \left(\frac{\text{rad}}{s}\right)]{x = 0/04 \cos(2\pi t)}$$

$$v = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 0/04 \times 2\pi = 0/04 \sqrt{2} \pi \left(\frac{m}{s}\right) = 2 \sqrt{2} \pi \left(\frac{\text{cm}}{s}\right) \xrightarrow{\pi=2} v = 12 \sqrt{2} \frac{\text{cm}}{s}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در حرکت سقوطی مسافت‌های طی شده در ثانیه‌های متوالی برابر است با:

$$0/5g \quad 1/5g \quad 2/5g \quad 3/5g$$

$$0/5 \times 10 = 5m : \text{ثانیه اول}$$

$$15m : \text{ثانیه دوم}$$

$$25m : \text{ثانیه سوم}$$

$$\left. \begin{array}{l} 35m : \text{ثانیه چهارم} \\ 45m : \text{ثانیه پنجم} \end{array} \right\} \text{متر } 80$$

$$\text{ارتفاع کل سقوط: } 125$$

$$F = f_s = m \frac{V^2}{r} = 2000 \times \frac{5^2}{20} = 2500$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۷۲

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۷۳

$$R = L_r = 5 \cdot \text{cm} = 0/5m \quad V = R \left(\frac{2\pi}{T} \right)$$

$$F_C = ma_C \Rightarrow k\Delta L = mR \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \Rightarrow 50(50 - 30) \times 10^{-2}$$

$$= 0/2 \times 0/5 \times \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \Rightarrow 100 = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \Rightarrow T = \frac{\pi}{5} s$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۷۴

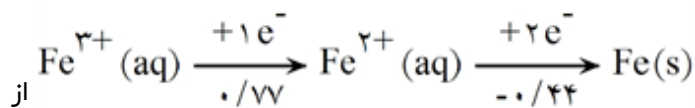
$$a_C = \frac{4\pi^2 r}{T^2} \Rightarrow \frac{a_B}{a_A} = \frac{r_B}{r_A} \times \left(\frac{T_A}{T_B} \right)^2 = 2 \times \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۷۵

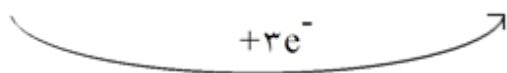
$$f_s = F_e = \frac{mv^2}{R} = \frac{1000 \times 15 \times 15}{30} = \frac{15000}{2} = 7500 \text{ N}$$

$$N = mg = 10000 \text{ N}$$

$$R = \sqrt{N^2 + f_s^2} = \sqrt{(7500)^2 + (10000)^2} = 5 \times 2500 = 12500 \text{ N}$$



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به ترتیب تبدیل مقابل ۷۶

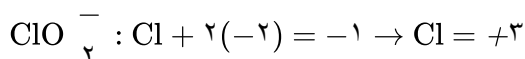
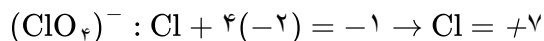
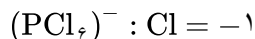
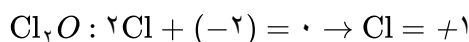
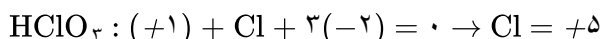
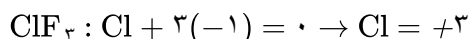
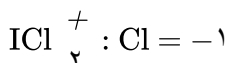
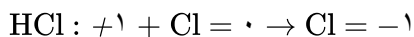


رابطه زیر برای محاسبه $E^\circ \frac{\text{Fe}^{3+}}{\text{Fe}}$ استفاده می‌کنیم.

$$E^\circ \frac{\text{Fe}^{3+}}{\text{Fe}} = \frac{\left(E^\circ \frac{\text{Fe}^{3+}}{\text{Fe}^{2+}} \times \text{تعداد } e \text{ مبادله شده} \right) + \left(E^\circ \frac{\text{Fe}^{2+}}{\text{Fe}} \times \text{تعداد } e \text{ مبادله شده} \right)}{\text{تعداد کلد الکترون های مبادله شده}}$$

$$\Rightarrow E^\circ \frac{\text{Fe}^{3+}}{\text{Fe}} = \frac{(0/77 \times 1) + (-0/44 \times 2)}{3} = \frac{0/77 - 0/88}{3} = \frac{-0/11}{3} = -0/036 \approx -0/04V$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. عدد اکسایش کلر در گونه‌ها به صورت زیر است:



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. فقط عبارتهای اول و دوم نادرست هستند.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. عبارات دوم و پنجم درست است.



گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

الف) نادرست است؛ زیرا جنس کاتد و آنود در فرآیند هال از گرافیت است.

ب) نادرست است؛ زیرا مانند فرآیند آبکاری این فرآیند نیز به کمک جریان برق انجام می‌شود؛ چو هر دو در یک سلول الکترولیتی انجام می‌پذیرند.

پ) درست است. فرآورده‌های آن آلومینیوم و CO_2 هستند که کربن در آن عدد اکسایش +۴ دارد.

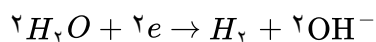
ت) نادرست است؛ زیرا تولید قوطی‌های آلومینیومی از قوطی‌های کهنه به ۷۰٪ از انرژی لازم برای تهیه همان تعداد قوطی در فرآیند هال نیاز دارد.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

جمله اول نادرست است؛ زیرا اگر به جای این‌که فلز M را به عنوان آنود استفاده کنیم، از پلاتین استفاده کنیم، یون‌های M^{2+} دیگر در آنود تولید نمی‌شوند و یون‌های M^{2+} موجود در محلول الکترولیت تنها در نیم‌واکنش کاهش در سطح تیغه X ($M^{2+} + 2e \rightarrow M$) مصرف می‌شوند، بنابراین غلظت این یون‌ها دیگر ثابت نبوده و با گذشت زمان کاهش می‌یابد.

جمله چهارم درست است؛ در آبکاری با فلز M، قدرت اکسندگی M^{2+} باید بیشتر از مولکول‌های آب باشد تا M^{2+} در نیم‌واکنش شرکت کند، نه مولکول‌های آب.

اگر مولکول‌های آب کاهش یابند، به جای فلز M، گاز هیدروژن در اطراف کاتد تولید می‌شود:

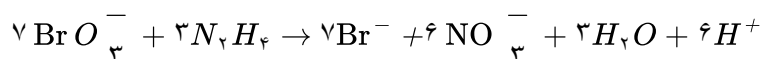


گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به E° اکسیژن در محیط خنثی ($0/4V$) و محیط اسیدی ($1/23V$)، می‌توان فلزها را از نظر اکسایش به سه دسته تقسیم کرد.

انواع فلزها از نظر اکسایش:

- (۱) $E^\circ < 0/4V$ ← در محیط خنثی اکسید می‌شود ← مثل روی و منیزیم
 (۲) $0/4V < E^\circ < 1/23V$ ← در محیط اسیدی اکسید می‌شود ← مثل نقره
 (۳) $E^\circ > 1/23V$ ← اکسید نمی‌شود ← مثل طلا

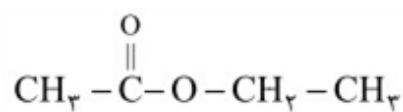
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. زیرا داریم:



$$C_4H_8O_2 = 0 \rightarrow 4C + 8 - 4 = 0 \rightarrow 4C = -4$$

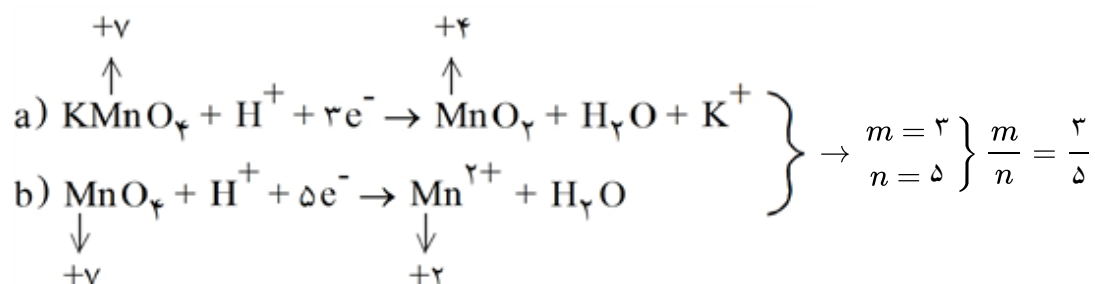
گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

و یا با توجه به ساختار لوویس:

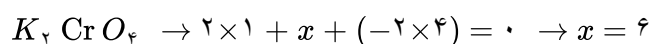
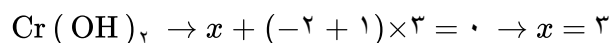


عدد اکسایش $-3 + 3 - 1 - 3$

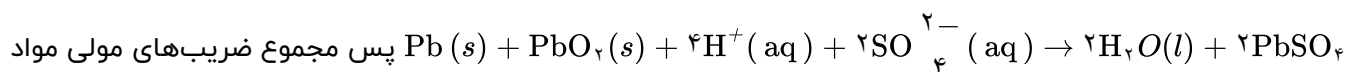
گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. معادله موازنه شده، واکنش چنین است:



در آن برابر ۱۲ است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در واکنش $\text{SO}_3 + \text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{H}_2\text{SO}_4$ ، عدد اکسایش هیچ کدام از اتم‌های شرکت‌کننده در واکنش تغییر نکرده است از این رو، این واکنش جزو واکنش‌های اکسایش - کاهش نمی‌باشد.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. آرایش لایه‌ی آخر $4s^2 4p^3$ یعنی گروه ۱۵ یا (VA) که در بالاترین ظرفیت آن همان شماره گروه آن است یعنی ۵

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. گاز هیدروژن با فشار ۱ atm از روی تیغه‌ی پلاتینی عبور می‌کند و وارد محلولی از اسید (H_3O^+) با مولاریته‌ی یک ($\text{PH} = 0$) می‌شود.

۹۱

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. تنها مورد ت درست است. بررسی موارد:

مورد (آ): درجه‌ی یونش اسیدها، برخلاف ثابت یونش آن‌ها به غلظت اسید وابسته است.

مورد (ب): اغلب اسیدها و بازهای شناخته شده ضعیف هستند.

مورد (پ): باران اسیدی حاوی نیتریک اسید و سولفوریک اسید است در حالی که باران معمولی حاوی کربنیک اسید است.

مورد (ت): چون جرم‌ها و حجم محلول‌ها برابر است، غلظت اسید دارای جرم مولی کمتر بیشتر است و در صورت انحلال، غلظت یون هیدرونیوم را بیشتر افزایش می‌دهد و در نهایت pH آن کم تر خواهد بود.

$$\downarrow \text{pH} = -\text{Log} [H^+] = -\text{Log} M_{\text{اسید}} = -\text{Log} \frac{(m_{\text{اسید}})}{\downarrow \text{جرم مولی} \times V}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ثابت تعادل فقط وابسته به دما است.

۹۲

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. حجم گاز O_2 تولید شده نصف گاز H_2 است. همچنین O_2 در برقکافت آب در آند تولید و در کاتد سلول سوختی مصرف می‌شود.

۹۳

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۹۴

مورد الف: صحیح - چون شوینده غیرصابونی قوی‌تر است.

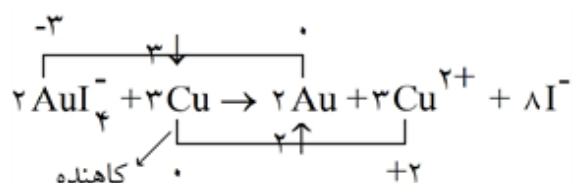
مورد ب: نادرست $C_5H_8 = 68 \neq 70$

مورد پ: صحیح است.

مورد ت: ۴ مول صابون تولید می‌شود. ترکیب (۳) سه مول و ترکیب (۴) یک مول صابون ایجاد می‌کند.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مورد اول: $E^{\circ}_{\text{کاتد}} - E^{\circ}_{\text{آند}} > 0$

۹۵



$$e \text{ تعداد} = 2e \times 3 = 6e$$

$E^{\circ}(Cu^{2+} / Cu)$ کمتر است پس کاهنده و آند است.

۹۶

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. فقط مورد دوم نادرست است. در واکنش کاتدی (کاهش O_2)، هیدروکسید تولید می‌کند.

۹۷

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. موارد الف و ت درست هستند. مورد ب: مولکول دارای دو حلقه بنزنی (شش کربن) می‌شود.

مورد پ: ۳، ۶، دی اتیل - ۴ - متیل نونان دارای چهارده کربن می‌باشد ولی مولکول داده شده دارای ۱۵ کربن است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. زیرا، داریم:

۹۸

$$[H^+] = M \times \alpha \Rightarrow 4 \times 10^{-3} = 0.2 \times \alpha \Rightarrow \alpha = 2 \times 10^{-2}$$

$$\% \alpha = \% 2$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. زیرا، با توجه به سه برابر شدن حجم محلول، مقدار تغییر pH برابر $\text{Log } 3 = 0.48$ است.

۹۹

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. زیرا، داریم:

۱۰۰

$$\alpha\% = \frac{[H^+]}{[HA]} \times 100 = \frac{10^{-6}}{0.0015} \times 100 = 0.67\%$$



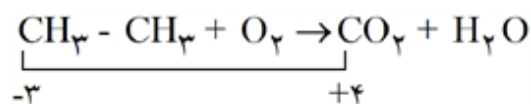
گزینه ۱ پاسخ صحیح است. زیرا، داریم:

۱۰۱

$$\text{Na درصد جرمی} = \frac{23}{390} \times 100 = 5.9\%$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. زیرا داریم:

۱۰۲



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. زیرا، عدد اکسایش هریک از این دو اتم کربن برابر صفر است.

۱۰۳

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. زیرا، با پیشرفت واکنش از شدت رنگ آبی محلول کاسته می‌شود.

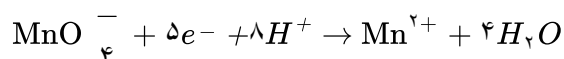
۱۰۴

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. زیرا از انحلال هر مول از آن در آب، ۴ مول یون تولید می‌شود.

۱۰۵

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. زیرا داریم:

۱۰۶

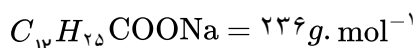


گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چربی مخلوطی از اسیدهای چرب و استرهای بلندزنجیر است و مولکول‌های صابون در آب به صورت سوسپانسیون نیستند.

۱۰۷

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. زیرا، داریم: $K_a = \frac{M\alpha}{1-\alpha} = \frac{[H^+]\alpha}{1-\alpha}$ که اگر $\alpha = 0.5$ باشد رابطه بالا تبدیل به $K_a = [H^+]$ می‌شود.

۱۰۸



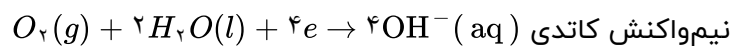
گزینه ۱ پاسخ صحیح است. زیرا داریم:

۱۰۹

$$\begin{array}{c|c} 23\text{gNa} & 236\text{g صابون} \\ \hline 0.05\text{gNa} & x \end{array} \Rightarrow x = 0.5\text{g صابون}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۱۱۰



چون E° روی نسبت به E° آهن منفی‌تر است، پس هنگام خراش در سطح آهن گالوانیزه فلز روی اکسید می‌شود و آهن محافظت می‌شود.

پاسنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	۴
۲۶	۱	۲	۳	۴
۲۷	۱	۲	۳	۴
۲۸	۱	۲	۳	۴
۲۹	۱	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	۴
۳۱	۱	۲	۳	۴
۳۲	۱	۲	۳	۴

۳۳	۱	۲	۳	۴
۳۴	۱	۲	۳	۴
۳۵	۱	۲	۳	۴
۳۶	۱	۲	۳	۴
۳۷	۱	۲	۳	۴
۳۸	۱	۲	۳	۴
۳۹	۱	۲	۳	۴
۴۰	۱	۲	۳	۴
۴۱	۱	۲	۳	۴
۴۲	۱	۲	۳	۴
۴۳	۱	۲	۳	۴
۴۴	۱	۲	۳	۴
۴۵	۱	۲	۳	۴
۴۶	۱	۲	۳	۴
۴۷	۱	۲	۳	۴
۴۸	۱	۲	۳	۴
۴۹	۱	۲	۳	۴
۵۰	۱	۲	۳	۴
۵۱	۱	۲	۳	۴
۵۲	۱	۲	۳	۴
۵۳	۱	۲	۳	۴
۵۴	۱	۲	۳	۴
۵۵	۱	۲	۳	۴
۵۶	۱	۲	۳	۴
۵۷	۱	۲	۳	۴
۵۸	۱	۲	۳	۴
۵۹	۱	۲	۳	۴
۶۰	۱	۲	۳	۴
۶۱	۱	۲	۳	۴
۶۲	۱	۲	۳	۴
۶۳	۱	۲	۳	۴
۶۴	۱	۲	۳	۴

۶۵	۱	۲	۳	۴
۶۶	۱	۲	۳	۴
۶۷	۱	۲	۳	۴
۶۸	۱	۲	۳	۴
۶۹	۱	۲	۳	۴
۷۰	۱	۲	۳	۴
۷۱	۱	۲	۳	۴
۷۲	۱	۲	۳	۴
۷۳	۱	۲	۳	۴
۷۴	۱	۲	۳	۴
۷۵	۱	۲	۳	۴
۷۶	۱	۲	۳	۴
۷۷	۱	۲	۳	۴
۷۸	۱	۲	۳	۴
۷۹	۱	۲	۳	۴
۸۰	۱	۲	۳	۴
۸۱	۱	۲	۳	۴
۸۲	۱	۲	۳	۴
۸۳	۱	۲	۳	۴
۸۴	۱	۲	۳	۴
۸۵	۱	۲	۳	۴
۸۶	۱	۲	۳	۴
۸۷	۱	۲	۳	۴
۸۸	۱	۲	۳	۴
۸۹	۱	۲	۳	۴
۹۰	۱	۲	۳	۴
۹۱	۱	۲	۳	۴
۹۲	۱	۲	۳	۴
۹۳	۱	۲	۳	۴
۹۴	۱	۲	۳	۴
۹۵	۱	۲	۳	۴
۹۶	۱	۲	۳	۴

۹۷	۱	۲	۳	۴
۹۸	۱	۲	۳	۴
۹۹	۱	۲	۳	۴
۱۰۰	۱	۲	۳	۴
۱۰۱	۱	۲	۳	۴
۱۰۲	۱	۲	۳	۴
۱۰۳	۱	۲	۳	۴
۱۰۴	۱	۲	۳	۴
۱۰۵	۱	۲	۳	۴
۱۰۶	۱	۲	۳	۴
۱۰۷	۱	۲	۳	۴
۱۰۸	۱	۲	۳	۴
۱۰۹	۱	۲	۳	۴
۱۱۰	۱	۲	۳	۴